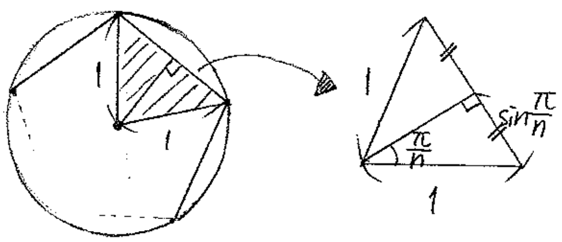
強者の戦略

前回の解答です。

(1)　半径1の円に内接する正n角形の周の長さをa_nとすると、下図より

$$a_n = n \cdot 2\sin\frac{\pi}{n}$$

である。



円周率の定義（π＝円周の長さ÷直径）から、この円の円周の長さは2πなので、

$$2\pi > a_n \iff \pi > \frac{a_n}{2}$$

がすべての自然数nで成立する。あとは、nをうまくとって、

$$\frac{a_n}{2} > 3.1 \quad \text{――――①}$$

とできればよい。

実際、$n=12$とすると、

$$\frac{a_{12}}{2} = 12\sin\frac{\pi}{12}$$

$$= 3(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

$$\left(\begin{aligned} \because\ \sin\frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{aligned}\right)$$

$$= 3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$$

$$> 3 \cdot 1.414 \cdot (1.732-1)$$

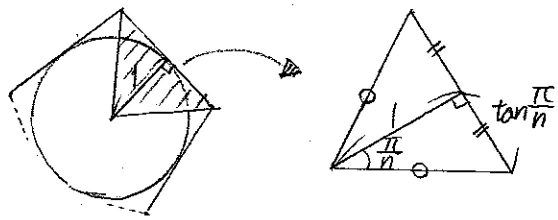
$$= 3.105\cdots > 3.1$$

となり、①が成立する。

(2)　半径1の円に外接する正n角形の周の長さをl_nとすると、下図より、

$$l_n = n \cdot 2\tan\frac{\pi}{n}$$

である。



$n \geqq 3$で、$\tan\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}$であることから

$$2\pi < l_n \iff \pi < \frac{l_n}{2}$$

が3以上の自然数nで成立するので、あとはnをうまくとって、

$$\frac{l_n}{2} < 3.2 \quad \text{――――②}$$

とできればよい。

$$\begin{aligned} \tan\frac{\theta}{2} &= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \end{aligned}$$

を用いると、$n=24$のとき、

$$\begin{aligned} \frac{l_{24}}{2} &= 24\tan\frac{\pi}{24} \\ &= 24 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{1+\cos\frac{\pi}{12}} \\ &= 24 \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}} \\ &= 24 \cdot (\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2) \\ &< 24 \cdot (2.450+1.415-1.732-2) \\ &= 3.192 < 3.2 \end{aligned}$$

となり、②が成立する。　□

強者の戦略

［コメント］

いかがだったでしょうか？ π を近似するために、円に内接・外接する正多角形を考える手法は、古くから知られています。辺の数を少し増やしてあげれば、手計算でも $\pi=3.1\cdots$ が証明できるというのが今回のテーマでした。

以下設問ごとに補足を述べます。

(1)　まず、$\pi=$ 円周の長さ÷直径なので、π を下から評価するには、円周の長さを下から評価すればよく、そのために内接する正多角形を考えます。2点を結ぶ曲線のうち最短のものは線分なので、

内接正多角形の周の長さ ＜ 円周の長さ

が成り立ちます。あとは、何角形にすれば良いかを考えるだけです。

東大の原題 $(\pi>3.05)$ を示すには、正八角形で十分なのですが、もう一頑張りして正十二角形で計算すると $\pi>3.1$ が示せます。今回はヒントとして、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ の下からの評価を与えましたが、なければ自分で証明してから用いて下さい。$\sqrt{6}-\sqrt{2}$ を $\sqrt{2}$ でくくることで、スムーズに評価できます。

また、周の長さではなく面積で評価する方法も考えられます。この場合は正二十四角形を考えれば同じ評価が得られうまくいくのですが、後述するように循環論法の影が見え隠れするので、少し"怖い"ところです。

(2)　次は外接する正多角形を考えて π を上から評価します。正十二角形でも $\pi<3.2\cdots$ しか得られないので、もっと精度を上げて、正二十四角形で考えます。$\tan\frac{\pi}{24}$ の値が必要になり、

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

を用いれば、ギリギリ計算できます。この式変形に気付かなければ、半角の公式で、

$$\tan^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

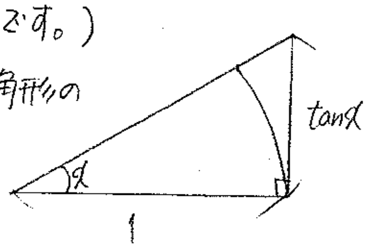
から、$\tan^2\frac{\pi}{24}$ を評価して下さい。この方法でも示せます。

この問題で気をつけたいのは、

円周の長さ ＜ 外接多角形の周の長さ

は自明ではないということです。一見当たり前のようですが、簡単には示せません。この議論を避けるために $\tan x>x$ の不等式をつけました。

（以下 理系の人向けです。）



右図で、扇形と直角三角形の面積を比べて、

$$\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$$
$$\Leftrightarrow x<\tan x$$

は自明と思う人がいるかもしれません。これを用いて、

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を証明しましたね。ところが、扇形の面積は $\sin x$ の積分で計算されるもので、積分や微分公式は上の極限公式から導かれます。まとめると、

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ に扇形の面積が必要

扇形の面積に $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が必要

となって、循環してしまいます。

これを回避するには、解析幾何学的に、$\sin x$ の定義を巾級数や積分で定義し直さなければならず、複雑な議論が必要です。

強者の戦略

[参考] アルキメデスは正九十六角形を円に内・外接させて、

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$
$$(3.140\cdots) \qquad (3.142\cdots)$$

を得ていたことが知られています。小数第二位まで正確に求まっているのはすごいですね。正十二角形から始めて、正九十六角形の周の長さを計算するのに便利な公式を最後に紹介します。

命題

$C_n = n\sin\frac{\pi}{n}$ （証明における $\frac{a_n}{2}$）

$d_n = n\tan\frac{\pi}{n}$ （証明における $\frac{\ell_n}{2}$）

($n=3, 4, 5, \cdots$) とおく。このとき、

$$\frac{1}{d_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C_n} + \frac{1}{d_n}\right)$$

$$\frac{1}{C_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{d_{2n}} \cdot \frac{1}{C_n}}$$

が成り立つ。

（証明）

$\frac{\pi}{n} = \theta$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} C_n + d_n &= n(\sin\theta + \tan\theta) \\ &= n\sin\theta \cdot \frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta} \\ &= 4n\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n d_n &= n^2 \sin\theta\tan\theta \\ &= n^2 \cdot 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\cos\theta} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \frac{C_n + d_n}{C_n d_n} &= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{n\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{2}{2n} \cdot \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}} \\ &= \frac{2}{d_{2n}} \end{aligned}$$

となり、左辺 $= \frac{1}{C_n} + \frac{1}{d_n}$ なので、第1式が成り立つ。

さらに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_{2n}} \cdot \frac{1}{C_n} &= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2n\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{n\sin\theta} \\ &= \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{2n\sin\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2n\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2n\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{C_{2n}}\right)^2 \end{aligned}$$

となり、両辺正であることから第2式が成り立つ。

□

これらの式を用いると、

$$12 \xrightarrow[\times 2]{} 24 \xrightarrow[\times 2]{} 48 \xrightarrow[\times 2]{} 96$$

となるので、（手計算では厳しいですが）円に内接・外接する正九十六角形の周の長さを求めることができます。興味のある人は計算してみて下さい。

今回は以上です。次回もお楽しみに。

（数学科　川崎）