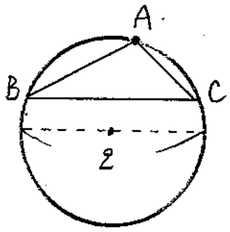
# 強者の戦略

前回の解答です。

(1) 背理法で示す。

$\angle A \geqq 90^\circ$ だと仮定すると、




$$BC^2 \geqq AB^2 + CA^2$$

が成立し、

$$8 < AB^2+BC^2+CA^2 \leqq 2BC^2$$

$$\therefore\ 8 < 2BC^2$$

$$\Longleftrightarrow\ BC^2 > 4$$

となるが、$BC \leqq 2$ （円の直径）なので、これは矛盾である。ゆえに $\angle A$ は鋭角で、$\angle B$, $\angle C$ についても同様なので、$\triangle ABC$ は鋭角三角形である。

□

(2) <解Ⅰ>　ベクトルを用いる方法

円の中心を O とし、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。このとき、

$$AB^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$BC^2 = |\vec{b}-\vec{c}|^2 = 2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$CA^2 = |\vec{c}-\vec{a}|^2 = 2-2\vec{c}\cdot\vec{a}$$

なので、

$$AB^2+BC^2+CA^2 = 6-2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}) \quad \text{——①}$$

となる。ここで、

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = 3+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$$

$$\Longleftrightarrow 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}) = |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2-3$$

なので、

$$① = 9-|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \leqq 9$$

が成立する。

等号が成立するのは、

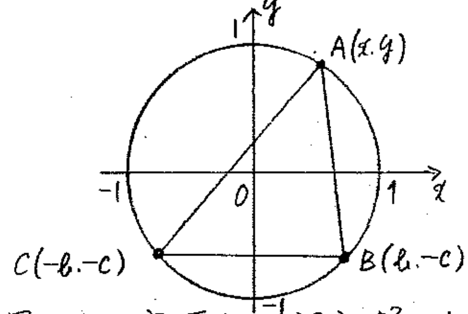
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$$

$\Longleftrightarrow$ O が $\triangle ABC$ の重心

$\Longleftrightarrow$ $\triangle ABC$ が正三角形

のときである。

<解Ⅱ>　座標を用いる方法




図のように座標軸を設定する。(1)より $\triangle ABC$ が鋭角三角形でなければ

$$AB^2+BC^2+CA^2 \leqq 8$$

となり、示すべき式は成り立つので、$\triangle ABC$ が鋭角三角形の場合を示せばよい。よって、

$$A(x, y),\ B(b, -c),\ C(-b, -c)$$
$$(b>0,\ c>0,\ b^2+c^2=1,\ x^2+y^2=1)$$

として一般性を失わない。このとき、

$$\begin{aligned}
AB^2+BC^2+CA^2 &= (x-b)^2+(y+c)^2 \\
&\quad +(x+b)^2+(y+c)^2+4b^2 \\
&= 4+4cy+4b^2 \\
&\qquad (\because b^2+c^2=x^2+y^2=1) \\
&= 4+4cy+4(1-c^2) \\
&= 8+4cy-4c^2 \\
&= -4\left(c-\frac{y}{2}\right)^2+y^2+8 \\
&\leqq y^2+8 \\
&\leqq 9
\end{aligned}$$

# 強者の戦略

等号が成立するのは、

$$c=\frac{y}{2} \text{ かつ } y^2=1 \Leftrightarrow y=1,\ c=\frac{1}{2}$$
$$(\because c>0)$$

のときで、このとき、

$$b=\sqrt{1-c^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x=\sqrt{1-y^2}=0$$

となり、

$$AB=BC=CA=\sqrt{3}$$

なので、△ABCは正三角形 である。

〈解III〉 三角関数を用いる方法 (i)

〈解II〉同様△ABCは鋭角三角形としてよい。
正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2$$

なので、

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=4(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)\\&=4\left(\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}\right)\\&=6-2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\quad\text{——②}\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\\&=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2C\quad(\because\text{和積})\\&=2\cos(\pi-C)\cos(A-B)+2\cos^2C-1\\&=2\cos^2C-2\cos C\cos(A-B)-1\\&\geqq 2\cos^2C-2\cos C-1\end{aligned}$$

($\because$ Cは鋭角より $\cos C>0$, 等号は $A=B$ のとき)

$$=2\left(\cos C-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\geqq-\frac{3}{2}$$

(等号は $\cos C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=60^\circ$ のとき)

となるので、

$$②\leqq 6-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=9$$

となる。等号が成立するのは、$A=B$ かつ $C=60^\circ$, すなわち、△ABCが正三角形のときである。

〈解IV〉 三角関数を用いる方法 (ii)

(②まで〈解III〉と同様で)

$$\begin{aligned}&\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\\&=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos(2\pi-(2A+2B))\\&=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1\\&=2\cos(A+B)(\cos(A-B)+\cos(A+B))-1\\&=-4\cos A\cos B\cos C-1\end{aligned}$$

と変形できる。A, B, Cは鋭角なので、

$$\cos A>0,\ \cos B>0,\ \cos C>0$$

で、相加・相乗平均の関係より、

$$\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C}\leqq\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\quad\text{——③}$$

(等号は $\cos A=\cos B=\cos C$
$\Leftrightarrow A=B=C$ のとき)

となり、さらに、$0<x<\frac{\pi}{2}$ で、$y=\cos x$ のグラフは上に凸なので、

$$\begin{aligned}\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}&\leqq\cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right)\quad\text{——④}\\&=\cos\frac{\pi}{3}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(等号は $A=B=C$ のとき)

が成立し、③、④から

# 強者の戦略

$$\sqrt[3]{\cos A\cos B\cos C} \leqq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C \leqq \frac{1}{8}$$

(等号は$A=B=C$のとき)

となる。ゆえに

$$② \leqq 6-2\left(-4\cdot\frac{1}{8}-1\right) = 9$$

であり、等号が成立するのは、$A=B=C$, すなわち$\triangle ABC$が正三角形のときである。//

(③についての補足)

$a>0$, $b>0$, $c>0$のとき、$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$が成立。

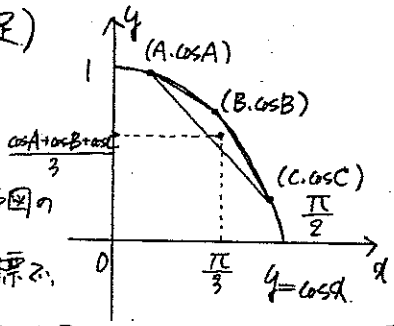
(証明) $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$, $\sqrt[3]{c}=z$として、

$x^3+y^3+z^3 \geqq 3xyz$を示せばよく、それは、

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)\left(\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2\right) \geqq 0$$

より成立する。(等号は$x=y=z$のとき成立) □

(④についての補足)




$A \neq B \neq C$のとき、

$\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}$は右図の三角形の重心の$y$座標で、重心は三角形の内部にあることから、この$y$座標は$\cos\dfrac{\pi}{3}$より小さい。また、A, B, Cのうち2つが一致するとき、

$\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}$は、2点を結ぶ線分を2:1に内分する点の$y$座標で、やはり$\cos\dfrac{\pi}{3}$より小さい。$A=B=C$のとき、

$\dfrac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}$は$\cos\dfrac{\pi}{3}$に一致する。

<コメント>

こんにちわ、数学科の川崎です。今回の京大の問題はいかがだったでしょうか。手の広い問題なので、

平面幾何・ベクトル・座標・三角関数

などの道具で、解けないか考えてみると良いでしょう。試験時間内で最適な解法を選択するには、日頃からの練習が必要です。

以下、問題についての補足を述べます。

(1) 幾何であっさり解決します。2辺の2乗の和なので、

・余弦定理(三平方の定理)

・中線定理

などがピンとくるようにしましょう。また、半径1の円に内接しているので、1辺の長さが2以下になることも意外と見落としがちな条件です。

他の解法は紹介していませんが、ベクトル・座標・三角関数でも証明することができます。

(2) <解I>

ベクトルを用いるとスッキリと示すことができます。対称性を利用するために原点を始点とした各点の位置ベクトルを考えます。$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$から$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$を導き出すのが気付きにくいかもしれませんが、3文字の対称式の基本的な式変形です。

<解II>

座標を用いるときは"軸をどのように設定するか"に注意が必要です。対称性が使えるよう、計算が楽になるように工夫しましょう。ここでは一辺が$x$軸と平行になるように点をとりました。

# 強者の戦略

〈解Ⅲ〉

辺の条件を正弦定理を用いて角度の条件に書きかえます。2次より1次の方が和積などが使えて計算しやすいので、半角の公式を用いたのが証明中の②です。この後の式変形が難しいのですが、基本は、"一文字固定して考える"です。

解答では、$C$を固定（$\Leftrightarrow$ ($A+B$)を固定）して、$C$、$A+B$が出てくるように式変形をしています。

〈解Ⅳ〉

②から、$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$ を変形して、$\cos A\cos B\cos C$ と積で表すことができます。これを知っていれば、相加相乗平均の関係とグラフの凸性から示すべき不等式が得られます。少々"飛び道具"を使いますが、エレガントな方法ですね。

（細かいことを言うと、2つの不等式の等号成立条件が同じなので最大値が得られますが、これがずれているときはこの方法は使えませんので、注意して下さい。）

少々余談ですが、$\sin$ の積についても、京大は過去に出題していますので、紹介しておきます。

**おまけの問題**

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ は $\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ を満たすものとする。このとき、$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を求めよ。　（99年 後期 理系②）

解Ⅳの方法で示すことができるのでやってみて下さい。（答えは $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ です。）

それでは今回はここまでにしておきます。また次回。

（数学科　川崎）