強者の戦略

前回の解答です。

(解答)

まず次の命題を示す。

命題(*)

x, y, z, w を整数とするとき、

$$x+y\sqrt{2} = z+w\sqrt{2}$$

ならば

$$x=z,\ y=w$$

が成立する。

(証明)

$y \neq w$ だとすると、

$$x+y\sqrt{2} = z+w\sqrt{2} \iff \sqrt{2} = \frac{z-x}{y-w}$$

となり、左辺は無理数、右辺は有理数なので矛盾する。よって、$y=w$ で、これから $x=z$ も従う。

□

(1) $(a+b\sqrt{2})^2 = a_2+b_2\sqrt{2}$

$$\iff (a^2+2b^2)+2ab\sqrt{2} = a_2+b_2\sqrt{2}$$

であり、a^2+2b^2, $2ab$, a_2, b_2 は整数なので、(*)より、

$$a_2 = a^2+2b^2, \quad b_2 = 2ab$$

となる。すると、aは奇数より、a_2も奇数である。
また、a_2とb_2の公約数(のうち1つ)をpとすると、a_2は奇数であることからpは奇数で、さらにaとbが互いに素であることから、pはa, bの一方のみを割り切る。pがaを割り切るとすると、

$$2b^2 = a_2 - a^2$$

はpで割り切れ、pは奇数なので、b^2を割り切ることになるが、aとbが互いに素よりaとb^2も互いに素なので、$p=1$となるしかない。pがbを割り切るときも同様に$p=1$となるので、a_2とb_2は互いに素である。

□

(2) $(a+b\sqrt{2})^{n+1} = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}$

$$\iff (a+b\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}$$

$$(\because (a+b\sqrt{2})^n = a_n+b_n\sqrt{2})$$

$$\iff aa_n+2bb_n+(ba_n+ab_n)\sqrt{2} = a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}$$

であり、aa_n+2bb_n, ba_n+ab_n, a_{n+1}, b_{n+1} は整数なので、(*)より、

$$a_{n+1} = aa_n+2bb_n \quad \text{——①}$$

$$b_{n+1} = ba_n+ab_n \quad \text{——②}$$

が成立する。すると、①において、aは奇数より、

$$a_n\text{が奇数} \Rightarrow a_{n+1}\text{が奇数}$$

が成立するので、帰納的にすべてのnでa_nは奇数である。

次に、"$n=2^k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき、a_nとb_nが互いに素であること"——☆ を数学的帰納法で示す。

$n=2$のときは、(1)で示した。

$n=2^k$のとき、a_{2^k}とb_{2^k}が互いに素だと仮定すると、

$$a_{2^{k+1}}+b_{2^{k+1}}\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2})^{2^{k+1}} = \left((a+b\sqrt{2})^{2^k}\right)^2 = (a_{2^k}+b_{2^k}\sqrt{2})^2$$

となるので、(1)と同様にして、$a_{2^{k+1}}$と$b_{2^{k+1}}$は互いに素である。以上で☆が示せた。

すると、ある自然数lで、a_l, b_lが互いに素でないとすると、①②より、a_{l+1}, b_{l+1}も互いに素でなく、以下帰納的に、$n \geqq l$のとき、a_nとb_nは互いに素でないことが示される。ところが、$l \leqq 2^k$となるkをとれば☆よりa_{2^k}とb_{2^k}は互いに素なので、これは矛盾。よって、すべての自然数nで、a_nとb_nは互いに素である。

□

強者の戦略

(2)の後半（a_n, b_nが互いに素であること）は次のように示すこともできます。

〈別解〉（①,②を導いた後で） $n \geq 2$のとき、

"a_n, b_nが互いに素 ⇒ a_{n+1}, b_{n+1}も互いに素"を示す。

①②より、

$$a a_{n+1} - 2b b_{n+1} = (a^2-2b^2)a_n \quad \text{—③}$$
$$a b_{n+1} - b a_{n+1} = (a^2-2b^2) b_n \quad \text{—④}$$

となる。ここで、a_{n+1}, b_{n+1}が互いに素でないとして、a_{n+1}, b_{n+1}の公約数のうち素数であるもの（の1つ）をpとおく。a_{n+1}は奇数より、pは奇数である。すると、③,④より、pは、$(a^2-2b^2)a_n$, $(a^2-2b^2)b_n$をともに割り切るが、a_n, b_nは互いに素なので、

pはa^2-2b^2を割り切る。 —— Ⓐ

また、①より、

$$2b b_n = a_{n+1} - a a_n$$
$$2b b_{n+1} = a_{n+2} - a a_{n+1}$$

であり、②より、

$$2b b_{n+1} = 2ab b_n + 2b^2 a_n$$

なので、上2式を代入して、

$$a_{n+2} - a a_{n+1} = a(a_{n+1} - a a_n) + 2b^2 a_n$$
$$\Leftrightarrow a_{n+2} - 2a a_{n+1} + (a^2-2b^2)a_n = 0$$
$$\therefore a_{n+1} - 2a a_n + (a^2-2b^2)a_{n-1} = 0 \quad \text{—⑤}$$

同様にすると、

$$b_{n+1} - 2a b_n + (a^2-2b^2) b_{n-1} = 0 \quad \text{—⑥}$$

も得られる。いま、$a_{n+1}, b_{n+1}, a^2-2b^2$をすべて$p$は割り切るので、$2a a_n$, $2a b_n$も割り切り、a_n, b_nが互いに素であることから、pは$2a$を割り切り、さらにpは奇数なので、

pはaを割り切る。 —— Ⓑ

すると、Ⓐ,Ⓑから、pはa, bをともに割り切ることになり、これはa, bが互いに素であることに矛盾。
よって、a_{n+1}, b_{n+1}も互いに素である。

あとは、$n=1$のときは仮定より、$n \geq 2$のときは(1)で、a_2とb_2が互いに素であることが言えているので、数学的帰納法により、すべての自然数nでa_nとb_nは互いに素である。 □

〈コメント〉

数学科の川崎です。今回は整数問題ということで、問題文はいつもよりスッキリしていました。取り組みやすいと感じた人も多かったのではないでしょうか。ただ、やってみると思った以上に大変です。特に(2)の後半は類題の経験がないときついと思うので、次に類題に当たったときは、本問の考え方を生かして下さい。

以下、設問についての補足です。

まず、冒頭で、$\sqrt{2}$が無理数であることから、係数が比較できることを示しました。ここまで厳密にやる必要はないかもしれませんが、当たり前のことでもきちんと説明できるようにしておきましょう。

(1) 展開すれば、a_2が奇数であることはすぐ分かります。

互いに素であることを示すには、互いに素でないと仮定して矛盾を導く（背理法）手法が有名ですので、しっかりマスターしておいて下さい。

(2) 二項展開して、a_n, b_nを書き出すこともできますが、汚い式になるので、漸化式を立てるのが良いでしょう。これからa_nが奇数であることはすぐに従います。問題は互いに素の部分です。この手の問題では漸化式を用いてa_n, b_nをa_{n+1}, b_{n+1}で表し、

a_{n+1}, b_{n+1}が互いに素でない

⇒ a_n, b_nが互いに素でない

を示すことで、a_1, b_1が互いに素なことに矛盾させるといったタイプの問題（下に参考問題をあげます）が多いのですが、本問でこれをやると分数が出てきてうまくいきません。

参考問題

nは正の整数とする。x^{n+1}をx^2-x-1で割った余りを$a_n x + b_n$とおく。

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$ を満たすことを示せ。

(2) $n=1, 2, 3, \cdots$に対して、a_n, b_nは共に正の整数で、互いに素であることを示せ。

（2002年 東大 理科前期）

強者の戦略

従って、別の方法を考えなくてはいけないのですが、漸化式から、

a_n, b_nが互いに素でない

⇒ a_{n+1}, b_{n+1}は互いに素でない

はすぐに証明できるので、あとは、nが大きいとき、a_n, b_nが互いに素が示せていれば矛盾が導けるというのが解答の方針です。言われたらなあんだとなりますが、自分で思いつくのは少し厳しいですね。

また、別解の方は、

a_n, b_nが互いに素

⇒ a_{n+1}, b_{n+1}は互いに素

を示す方針で、自然な方法です。しかし、式がかなり複雑になるので、試行錯誤しながら見通し良く計算しなくてはいけません。

今回は、2^nのところを先回りして示すという、少し見慣れない証明をお見せしました。次回も似たような考え方を使う問題を出題しようと考えていますので、お楽しみに。

年内の私からの出題はこれで最後ですので、また年明けにお会いしましょう。(少し早いですが)良いお年をお過ごしください。

(数学科　川崎)