強者の戦略

前回の解答です。

（解答）

(1) まず

$$(f(x)e^{-x})' \geqq 0 \quad \text{——} ①$$

を示す。

$$(f(x)e^{-x})' = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x}$$
$$= (f'(x) - f(x))e^{-x} \text{——} ②$$

であり，$f'(x) \geqq f(x)$，$e^{-x} > 0$ なので，①が成り立つ。

次に，$f'(x) = f(x)$ が恒等的に成り立つとき，

$$f(x) = f(0)e^{x} \quad \text{——} ③$$

であることを示す。このとき，②より，

$$(f(x)e^{-x})' = 0$$

なので，C_1を定数として，

$$f(x)e^{-x} = C_1 \Leftrightarrow f(x) = C_1 e^{x}$$

となり，$x = 0$とすれば

$$C_1 = f(0)$$

である。よって，③が示された。

(2) $x > 0$において，

$$\left(\frac{g(x)}{e^{x} - e^{-x}}\right)'$$
$$= \frac{g'(x)(e^{x} - e^{-x}) - g(x)(e^{x} + e^{-x})}{(e^{x} - e^{-x})^2} \text{——} ④$$

であり，$(e^{x} - e^{-x})^2 > 0$ なので，

$$h(x) = g'(x)(e^{x} - e^{-x}) - g(x)(e^{x} + e^{-x})$$

とおくとき，$h(x) \geqq 0$を示せばよい。$g(x)$は第2次導関数をもつので，

$$h'(x) = g''(x)(e^{x} - e^{-x}) + g'(x)(e^{x} + e^{-x})$$
$$- g'(x)(e^{x} + e^{-x}) - g(x)(e^{x} - e^{-x})$$
$$= (g''(x) - g(x))(e^{x} - e^{-x}) \text{——} ⑤$$

であり，$g''(x) \geqq g(x)$，$e^{x} > e^{-x}$ $(\because x > 0)$ なので，

$$h'(x) \geqq 0$$

である。よって，$h(x)$は単調増加で，これと

$$h(0) = -g(0) \cdot 2 = 0 \quad (\because g(0) = 0)$$

より，$h(x) \geqq 0$となる。

(3) $g''(x) = g(x)$が恒等的に成り立つとき，$x > 0$において，⑤より

$$h'(x) = 0$$

なので，C_2を定数として，$h(x) = C_2$と書ける。これと $h(0) = 0$ より，

$$C_2 = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$$

である。よって，④より，

$$\left(\frac{g(x)}{e^{x} - e^{-x}}\right)' = 0$$

なので，C_3を定数として，

$$\frac{g(x)}{e^{x} - e^{-x}} = C_3 \Leftrightarrow g(x) = C_3(e^{x} - e^{-x})$$

と書ける。このとき，

$$g'(x) = C_3(e^{x} + e^{-x})$$

が$x > 0$で成立し，$g'(x)$は微分可能なので特に$x = 0$で右連続なので，

$$\lim_{x \to +0} g'(x) = g'(0) = C_3(e^{0} + e^{-0}) = 2C_3$$
$$\Leftrightarrow \quad C_3 = \frac{g'(0)}{2}$$

となる。よって，

$$g(x) = \frac{g'(0)(e^{x} - e^{-x})}{2}$$

である。

□

強者の戦略

〈コメント〉

今回の問題は2006年に奈良県立医大で出題されたものです。誘導がなければ解くのは厳しいですが、誘導が親切で適度な難易度になっています。(1),(3)の関数の決定がメインのテーマですが、どちらも"微分が恒等的に0ならばその関数は定数関数である。"という当たり前のことがポイントになります。

以下、設問ごとの補足です。

(1) 前半は微分するだけです。後半も、微分の式を見て、$f'(x)=f(x) \iff (f(x)e^{-x})'=0$ に気付けば、あとは一直線でしょう。定数を決めるために $x=0$ とすれば O.K です。

$$(f(x)e^{-x})' = (f'(x)-f(x))e^{-x}$$

と、e^{-x} をかけて微分することで、$f'(x)-f(x)$ が作り出せるのが面白いですね。同様にして、$f'(x)+f(x)$ は、

$$(f(x)\cdot e^{x})' = (f'(x)+f(x))e^{x}$$

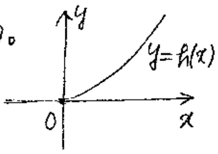
として、また、$xf'(x)+f(x)$ は、

$$(xf(x))' = xf'(x)+f(x)$$

として、微分の式の中に作り出すことができます。

($xf'(x)+f(x)$ の方は、数年前ある大学院の院試で出題されていました。)

(2) 微分して、(分母)>0 なので、(分子)≧0 を示せば O.K です。分子を $h(x)$ とおくと、$h'(x)\geqq 0$ となるので端の値 ($h(0)$) をcheckしましょう。$h(0)=0$ となり、証明が完成します。



(3)

$$g''(x)=g(x) \iff h(x)\text{は定数}$$
$$\iff h(x)=h(0)=0$$
$$\iff \frac{g(x)}{e^{x}-e^{-x}}\text{は定数}$$

までは(1)と同様の考え方でできます。難しいのは

$$g(x)=C_3(e^{x}-e^{-x})$$

の C_3 を決める部分で、単に $x=0$ とすると、右辺も0になり失敗します。ここは、$g(x)$ が第2次導関数をもつことから、$g'(x)$ の連続性を使って C_3 を求めましょう。問題文に $C_3=\frac{g'(0)}{2}$ だと書いてありますので、微分して考えることに気付きたいものです。

(参考)

(1),(3)はそれぞれ

$$\frac{dy}{dx}=y \quad \text{——①}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y,\quad y|_{x=0}=0 \quad \text{——②}$$

という微分方程式を誘導のもとで解かせたものです。誘導がなければ、①は、($y=0$ (自明解)以外に)

$$\frac{dy}{y}=dx$$

より、両辺積分して、

$$\log y = x + C \iff y=c'e^{x}\ (c'=y|_{x=0})$$

と解けます。また、②は、自明解以外には、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}+y\right)=\frac{dy}{dx}+y$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}-y\right)=-\left(\frac{dy}{dx}-y\right)$$

となるので、上と同様にすると、

$$\frac{dy}{dx}+y=\alpha e^{x},\quad \frac{dy}{dx}-y=\beta e^{-x}$$

とできて、この2式を引くことで、

$$y=\frac{1}{2}(\alpha e^{x}-\beta e^{-x})$$

となります。さらに、$x=0$ で $y=0$ となることから

$$\alpha=\beta$$

と書けて、あとは解答のように微分を考えて α を求めれば解けます。

強者の戦略

1年弱という短い間でしたが、読んで下さった皆さんありがとうございました。今年受験という人はまもなくに迫った国公立前期試験に向けて最後の追いこみに励んでいるところだと思います。体調には気をつけて、本番ではこれまで培ってきた数学力を思いきり発揮して下さい。まだ受験ではない高2以下の皆さんは、来年度もこのコーナーで興味深い問題を出題していく予定ですので、ご期待下さい。

それでは今年度はここまでにしたいと思います。ありがとうございました。

（数学科　川崎）