数学集中講義

格子点の図形的考察 ① 〜平面上の格子点の配置〜

吉田　信夫

大学への数学　10 年 8 月号　掲載

座標がすべて整数であるような点を格子点という．

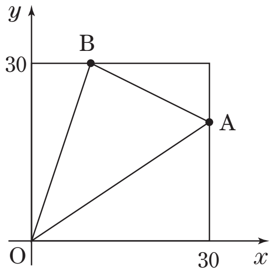
平面内の特定の領域にある格子点の個数を求める問題は，よく目にする．

問題 1．xy 平面で 3 点 O，A(30，20)，B(10，30) を頂点とする三角形 OAB の周および内部に含まれる格子点の個数を求めよ．

解　図のように正方形で囲むと，正方形の周および内部にある格子点の個数は

$$31\cdot 31=961$$

である．ここから，三角形 OAB の周，内部に含まれないものの個数を引けば良い．



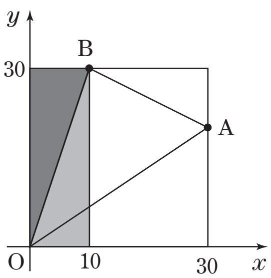
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=10\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=10\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=10\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

から，線分 OA，OB，AB 上には，端点も含めて 11 個ずつの格子点がある (各線分上には，“この方向ベクトル刻み”に格子点がある)．

よって，線分 OA，OB，AB 上には，端点も含めて 11 個ずつの格子点がある (周全体には 30 個)．

まず，除くべき格子点のうち，左上の三角形に含まれる格子点を数える．

O，(10，0)，B，(0，30) を頂点にもつ長方形の周および内部には $11\cdot 31$ 個の格子点がある．また，対角線 OB 上には 11 個の格子点がある．対称性から，左上の三角形内の格子点の個数は



$$\frac{11\cdot 31-11}{2}=165$$

である．同様に考えて，右下，右上の三角形に含まれる格子点の個数は，それぞれ，

$$\frac{31\cdot 21-11}{2}=320,\ \frac{21\cdot 11-11}{2}=110$$

である．よって，求める格子点の個数は

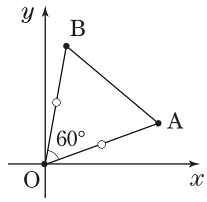
$$961-(165+320+110)=\mathbf{366}$$

である．

⇨注　三角形 OAB の周および内部の格子点で，直線 $x=k$ $(0\leqq k\leqq 30)$ 上のものの個数を求めて，それらを加えても 366 を得ることはできる．しかし，k を 2 や 3 で割った余りによる場合分けが必要になり，面倒になる．

問題 2．座標平面内で格子点のみを頂点にもつような正三角形は存在するか．

解 1．そのような正三角形は存在しないことを示す．



格子点のみを頂点にもつ正三角形が存在すると仮定する．このとき，平行移動して，頂点の 1 つが原点であるとしても一般性を失わない．残りの 2 頂点を A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ は整数$)$ とする．すると，線分 OA (OB，AB) の長さの平方

$$\mathrm{OA}^2=a_1{}^2+a_2{}^2$$

は正の整数である．また，三角形 OAB の面積

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\left|a_1b_2-a_2b_1\right| \quad\cdots\cdots\cdots\quad (*)$$

は有理数である．しかし，三角形 OAB の面積は

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}^2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{OA}^2$$

と表すこともでき，無理数である．

これは不合理であり，仮定は誤りである．

よって，頂点が格子点のみの正三角形は**存在しない**．

*　　　　　*

sin60° が無理数であることが論拠である．これを少し違う側面から見ると，次のような解法が考えられる．

解 2. 格子点のみを頂点にもつ正三角形が存在すると仮定し，さきほどと同様に点O，A，Bを設定する．さらに，線分OAを原点の回りに60°回転したら線分OBになるものとして一般性を失わない．

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1-\sqrt{3}a_2 \\ \sqrt{3}a_1+a_2 \end{pmatrix}$$

において，$\sqrt{3}$ が無理数であり，$(a_1,\ a_2)\neq(0,\ 0)$ であるから，b_1，b_2 の少なくとも一方は無理数である．しかし，b_1，b_2 は整数であるから，不合理である．

よって，頂点が格子点のみの正三角形は**存在しない**．

*　　　*

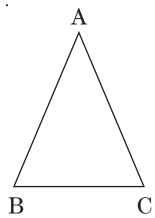
一般に，有理点(つまり，座標がすべて有理数であるような点)で考えよう．

有理点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を結ぶ線分の長さの平方は，三平方の定理より，

$$\mathrm{AB}^2=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2$$

となるから，有理数である．また，(*)と同様，有理点のみを頂点にもつ三角形の面積は有理数である．

よって，平面内で有理点のみを頂点にもつ二等辺三角形ABC $(\mathrm{AB}=\mathrm{AC})$ があれば，面積公式：



$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2\sin A$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{2\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AB}^2}$$

および，余弦定理：

$$\cos A=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{2\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}^2}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(\#)$$

から，$\sin A$，$\cos A$ は有理数となる．

逆に，頂角の正弦または余弦が無理数になる二等辺三角形は，有理点のみを頂点として作ることができない．

ところで，次元を1つ上げて，

> **問題** 2′. 座標空間内で有理点のみを頂点にもつような正三角形は存在するか．

なら，答えは「**存在する**」である．例えば，

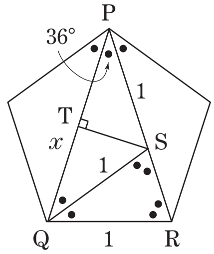
$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$$

とすれば良い．空間では，頂点が格子点ばかりでも，三角形の面積が有理数になるとは限らないのである．

一方，空間内でも，有理点を結ぶ線分の長さの平方は有理数である．

> **問題** 2″. 座標空間内で有理点のみを頂点にもつような正五角形は存在するか．

解 $\cos 36^\circ$ を求める．



図のような1辺の長さが1の正五角形において，対角線の長さを x $(x>1)$ とおく．すると，図のように二等辺三角形を作って，

$$\mathrm{QR}=\mathrm{QS}=\mathrm{PS}=1,$$
$$\mathrm{SR}=x-1$$

である．三角形PQRと三角形QRSが相似であるから，

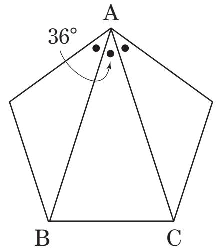
$$x:1=1:x-1\quad\therefore\quad x(x-1)=1$$
$$\therefore\quad x^2-x-1=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (x>1)$$

である．よって，三角形PSTに注目して，

$$\cos 36^\circ=\frac{x}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

であり，これは無理数である．



有理点のみを頂点として正五角形を作ることができるなら，図のような二等辺三角形を，有理点のみを頂点として作ることができる．

すると，AB^2，BC^2 は有理数になるので，(#)から，$\cos 36^\circ$ が有理数になってしまう．これは不合理である．

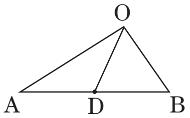
よって，有理点のみを頂点にもつような正五角形は**存在しない**．

*　　　*

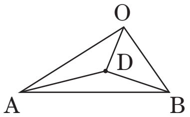
(*)から分かるように，格子点のみを頂点にもつ三角形の面積は，$\dfrac{1}{2}$ の自然数倍である．このことをより深く掘り下げてみよう．

> **問題** 3. 座標平面内に格子点A，Bがある．
> $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}$ ならば，三角形OABの周および内部にある格子点はO，A，Bのみであることを示せ．

解　対偶を示す．



三角形OABの周または内部に頂点以外の格子点Dが存在すれば，三角形OABは2つ以上の小三角形(頂点は格子点)に分割できる．各小三角形の面積は $\frac{1}{2}$ の自然数倍なので，$\frac{1}{2}$ 以上であり，三角形OABの面積は1以上となる．つまり，$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}$ ではない．



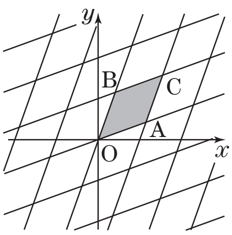
対偶が示されたので，これで題意は示された．

*　　　　　　　*

次に，**問題** 3の逆を考えよう．

> **問題** 4.　座標平面内に格子点A，Bがあり，三角形OABの周および内部にある格子点がO，A，Bのみであるとする．
>
> （1）　すべての格子点Pは，整数 s，t を用いて，
>
> $$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
>
> と表せることを示せ．
>
> （2）　$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}$ であることを示せ．

解　（1）点Cを $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めると，Cは格子点で，平行四辺形OACBの周および内部にある格子点はO，A，C，Bのみである．



図のように，これと合同な平行四辺形で平面全体を覆い尽くせる．各平行四辺形の頂点は格子点であり，周および内部に格子点は存在しない．

よって，任意の格子点Pは，どれかの平行四辺形の頂点になるので，ある整数 s，t が存在して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せることが分かる．

（2）　$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ とおくと，（1）より，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ に対して，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad sa_1+tb_1=1\ \cdots\cdots(1)\quad sa_2+tb_2=0\ \cdots\cdots(2)$$
$$ua_1+vb_1=0\ \cdots\cdots(3)\quad ua_2+vb_2=1\ \cdots\cdots(4)$$

となる整数 s，t，u，v が存在して，$v\times(1)-t\times(3)$，$s\times(3)-u\times(1)$，$v\times(2)-t\times(4)$，$s\times(4)-u\times(2)$ から，

$$(sv-tu)a_1=v,\ (sv-tu)b_1=-u,$$
$$(sv-tu)a_2=-t,\ (sv-tu)b_2=s$$

を得る．4式を用いて右辺が $sv-tu$ になるようにすると，

$$(sv-tu)^2(a_1b_2-a_2b_1)=sv-tu$$

となる．ここで，$sv-tu=0$ としたら $s=t=u=v=0$ となり，(1)，(4)に矛盾する．ゆえに，$sv-tu\fallingdotseq 0$ で，

$$(a_1b_2-a_2b_1)(sv-tu)=1$$

$$\therefore\quad a_1b_2-a_2b_1=1\quad \text{または}\quad -1$$

$$(\because\ a_1b_2-a_2b_1,\ sv-tu\ \text{は整数})$$

である．よって，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|=\frac{1}{2}$$

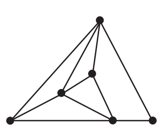
である．

*　　　　　　　*

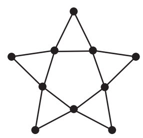
これを用いて **問題** 1の答えを確認するために，多角形に関する公式を紹介しよう．

> 多角形の周および内部に点をとり，これらを頂点とする小多角形に分割すると，以下が成り立つ：
>
> (点の個数)－(辺の個数)＋(多角形の個数)＝1
>
> ………　($)

例



$6-10+5=1$



$10-15+6=1$

参考　($)を用いて，**問題** 1の答えを確認しよう．

三角形OABの周および内部のすべての格子点を用いて三角形OABを小三角形に分割し，公式を適用する．

各小三角形の内部に格子点はないので，**問題** 4より，小三角形の面積は $\frac{1}{2}$ である．三角形OABの面積 S が

$$S=\frac{1}{2}\left|30\cdot30-10\cdot20\right|=350$$

であるから，三角形OABは700個の小三角形に分割されている(多角形の個数は700)．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=10\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=10\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}=10\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

から，線分OA，OB，AB上には，端点も含めて11個

ずつの格子点がある.（周上の格子点の個数Nは$N=30$である）. 三角形OABの内部にある格子点の個数をPとおくと，点の個数は$P+N=P+30$である.

いま，周は30個の小線分に分割されている. 700個の小三角形の辺は重複を込みにして$700\cdot3$個あり，これらのうち三角形OABの内部にある$700\cdot3-30$個は，2つの小三角形で共有されている. よって，分割における辺の個数は$\dfrac{3\cdot700-30}{2}+30$である.

よって，($) から，

$$(P+30)-\left(\frac{3\cdot700-30}{2}+30\right)+700=1$$

$$\therefore\quad P=336$$

であり，確かに**問題**1の答えと一致する.

⇨**注**　格子点のみを頂点にもつ三角形OABで，面積S，周上の格子点数N，内部の格子点数Pは，

$$(P+N)-\left(\frac{3\cdot2S-N}{2}+N\right)+2S=1$$

$$\therefore\quad S=\frac{1}{2}N+P-1$$

という関係式を満たす. これを“ピックの定理”といい，一般に，格子点のみを頂点にもつ多角形で成り立つ.

*　　　　　　　*

では，最後に，面積を利用した論証問題を挙げておく.

問題 5.　座標平面の点列$\{P_n(x_n,\ y_n)\}$を

$$x_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2},\quad y_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\quad(n\geqq0)$$

で定める.

（1）　三角形OP_nP_{n+1}の面積を求めよ.

（2）　$\overrightarrow{OP}_{n+2}=6\overrightarrow{OP}_{n+1}-\overrightarrow{OP}_n$を示せ.

（3）　曲線$C: x^2-2y^2=1$ $(x\geqq0,\ y\geqq0)$上の格子点をすべて求めよ.

解　（1）　$\beta=3+2\sqrt{2}$，$\alpha=3-2\sqrt{2}$とおくと，

$$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=1,\ \beta-\alpha=4\sqrt{2}$$

$$x_n=\frac{\beta^n+\alpha^n}{2},\ y_n=\frac{\beta^n-\alpha^n}{2\sqrt{2}}\quad\cdots\cdots\cdots\ (\%)$$

である. よって，

$$\triangle OP_nP_{n+1}=\frac{1}{2}\left|x_ny_{n+1}-x_{n+1}y_n\right|$$

$$=\frac{\left|(\beta^n+\alpha^n)(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})-(\beta^{n+1}+\alpha^{n+1})(\beta^n-\alpha^n)\right|}{8\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left|2\alpha^n\beta^{n+1}-2\alpha^{n+1}\beta^n\right|}{8\sqrt{2}}=\frac{\left|2(\alpha\beta)^n(\beta-\alpha)\right|}{8\sqrt{2}}$$

$$=\mathbf{1}$$

である.

（2）　解と係数の関係から，α，βは2次方程式

$$x^2-6x+1=0$$

の2解であり，

$$\alpha^2-6\alpha+1=0,\ \beta^2-6\beta+1=0$$

を満たす. ゆえに，(%) から，

$$x_{n+2}=\frac{\beta^{n+2}+\alpha^{n+2}}{2}=\frac{\beta^n\cdot\beta^2+\alpha^n\cdot\alpha^2}{2}$$

$$=\frac{\beta^n(6\beta-1)+\alpha^n(6\alpha-1)}{2}$$

$$=\frac{6(\beta^{n+1}+\alpha^{n+1})-(\beta^n+\alpha^n)}{2}$$

$$=6x_{n+1}-x_n$$

であり，同様に

$$y_{n+2}=6y_{n+1}-y_n$$

である. よって，

$$\overrightarrow{OP}_{n+2}=6\overrightarrow{OP}_{n+1}-\overrightarrow{OP}_n$$

が成り立つ.

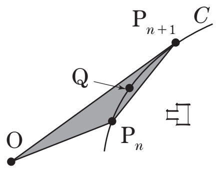
（3）　$P_0(1,\ 0)$，$P_1(3,\ 2)$はC上の格子点であるから，（2）より，帰納的に，P_nは格子点である. また，

$$x_n\geqq0,\ y_n\geqq0,$$

$$x_n{}^2-2y_n{}^2=\frac{(\beta^n+\alpha^n)^2}{4}-2\cdot\frac{(\beta^n-\alpha^n)^2}{8}$$

$$=\frac{4(\alpha\beta)^n}{4}=1$$

より，P_nはC上の格子点である.



Cの弧P_nP_{n+1}上に格子点Qが存在したら，凸性から，それは三角形OP_nP_{n+1}の内部にあり，

$$\triangle OP_nP_{n+1}=\triangle OP_nQ+\triangle OP_{n+1}Q+\triangle P_nP_{n+1}Q\geqq\frac{3}{2}$$

となる. これは（1）に矛盾する.

ゆえに，C上の弧P_nP_{n+1}に格子点は存在しない.

以上から，C上の格子点は

$$\mathbf{P_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots)}$$

である.

（よしだ　のぶお，予備校講師）