数学集中講義

格子点の図形的考察 ②　～２次曲線上の格子点，有理点～

吉田　信夫

大学への数学　10 年 12 月号　掲載

8 月号では，点列 $\{\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)\}$ を

$$x_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2}$$
$$y_n=\frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\quad(n\geqq 0)$$

で定めると，これらが曲線 $C:x^2-2y^2=1$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上のすべての格子点であることを示した．

このように双曲線上の格子点を求める問題は，“ペル方程式”と呼ばれており，入試問題でもよく見かける．以前は，天下り的に P_n を与えたが，これを探し出す流れを見ておこう．

> **問題** 6.　曲線 $C:x^2-2y^2=1$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上の格子点を y 座標が小さい方から順に
>
> $\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \cdots\cdots$
>
> とおく．
>
> （1）　$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1$ をそれぞれ $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2$ に移すような 1 次変換 f を表す行列 A を求めよ．
>
> （2）　点列 $\{\mathrm{Q}_n(x_n,\ y_n)\}$ を以下で定める：
>
> $\mathrm{Q}_0=\mathrm{P}_0,\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=A\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n-1}}$ $(n\geqq 1)$
>
> このとき，$\mathrm{Q}_n=\mathrm{P}_n$ $(n\geqq 0)$ であることを示せ．
>
> （3）　P_n の座標を n の式で表せ．

解　（1）　まず，$y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ と代入して，

$\mathrm{P}_0(1,\ 0),\ \mathrm{P}_1(3,\ 2),\ \mathrm{P}_2(17,\ 12)$

であることが分かる．すると，

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\12\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&17\\2&12\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}3&17\\2&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&17\\2&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

である．

（2）　定義から，$n=0,\ 1,\ 2$ のときは $\mathrm{Q}_n=\mathrm{P}_n$ である．

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_n+4y_n\\2x_n+3y_n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad x_{n+1}=3x_n+4y_n,\ y_{n+1}=2x_n+3y_n\quad\cdots\cdots\quad(*)$$

より，Q_n はすべて $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を満たす格子点で，$\{y_n\}$ は増加数列である．しかも，

$${x_{n+1}}^2-2{y_{n+1}}^2=(3x_n+4y_n)^2-2(2x_n+3y_n)^2$$
$$={x_n}^2-2{y_n}^2$$

であるから，帰納的に，Q_n はすべて C 上の格子点であることが分かる．

$\{y_n\}$ が増加数列なので，$\mathrm{P}_n=\mathrm{Q}_n$ $(n\geqq 0)$ を示すには，C 上の格子点が Q_n $(n\geqq 0)$ のみであることを示せば良い．

他の格子点 R が存在すれば，それが C の弧 $\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ 上にあるような n $(n\geqq 1)$ が存在する．

ここで，

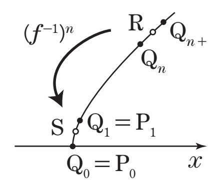
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix}$$

は成分がすべて整数の行列であるから，1 次変換 f^{-1} は格子点を格子点に移す．

また，$p^2-2q^2=1$ を満たす点 $(p,\ q)$ の f^{-1} による像 $(X,\ Y)$ は

$$X^2-2Y^2=(3p-4q)^2-2(-2p+3q)^2$$
$$=p^2-2q^2=1$$

を満たす．



よって，点 S を

$$(A^{-1})^n\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$

で定めると，S は格子点で，

$$(A^{-1})^n\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_0},\ (A^{-1})^n\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}_{n+1}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}$$

から，S は C の弧 $\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1$ 上にあることが分かる．

しかし，$\mathrm{P}_0,\ \mathrm{P}_1$ の取り方から，これは不合理である．

よって，C 上の格子点は Q_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のみであり，

$$\mathrm{Q}_n=\mathrm{P}_n\quad(n\geqq 0)$$

である．

（3）　$x_0=1,\ y_0=0$ と $(*)$ から一般項を求める．

$$x_1 = 3x_0 + 4y_0 = 3$$

であり，$y_n = \dfrac{x_{n+1} - 3x_n}{4}$ より，

$$\frac{x_{n+2} - 3x_{n+1}}{4} = 2x_n + 3\cdot\frac{x_{n+1} - 3x_n}{4}$$

$$\therefore \quad x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \quad (n \geqq 0)$$

である．特性方程式

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

の 2 解を $\beta = 3+2\sqrt{2}$，$\alpha = 3-2\sqrt{2}$ とおくと，

$$x_{n+2} - \alpha x_{n+1} = \beta(x_{n+1} - \alpha x_n),$$

$$x_{n+2} - \beta x_{n+1} = \alpha(x_{n+1} - \beta x_n)$$

となり，

$$x_1 - \alpha x_0 = 3 - \alpha = 2\sqrt{2},$$

$$x_1 - \beta x_0 = 3 - \beta = -2\sqrt{2}$$

から，

$$x_{n+1} - \alpha x_n = 2\sqrt{2}\beta^n,$$

$$x_{n+1} - \beta x_n = -2\sqrt{2}\alpha^n$$

である．これらの差をとって，

$$(\beta - \alpha)x_n = 2\sqrt{2}(\beta^n + \alpha^n)$$

$$\therefore \quad x_n = \frac{2\sqrt{2}(\beta^n + \alpha^n)}{4\sqrt{2}} = \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}$$

である．また，

$$y_n = \frac{x_{n+1} - 3x_n}{4} = \frac{\dfrac{\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}}{2} - 3\cdot\dfrac{\beta^n + \alpha^n}{2}}{4}$$

$$= \frac{(\beta-3)\beta^n + (\alpha-3)\alpha^n}{8} = \frac{2\sqrt{2}\beta^n - 2\sqrt{2}\alpha^n}{8}$$

$$= \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

である．よって，P_n の座標は

$$\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2},\ \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\right)$$

である．

*　　　　　　*

ペル方程式の解は，3 項間漸化式を解いて得られる．特性解 α，β の“共役性”に注目した解法も重要である：

別解　（3）　$\beta = 3+2\sqrt{2}$，$\alpha = 3-2\sqrt{2}$ とおくと，

$$\beta^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n \geqq 0)$$

となる 0 以上の整数 a_n，b_n が存在し，しかも，

$$\alpha^n = a_n - b_n\sqrt{2} \quad (n \geqq 0)$$

である．和と差を計算すると，

$$\beta^n + \alpha^n = 2a_n, \quad \beta^n - \alpha^n = 2\sqrt{2}b_n$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{\beta^n + \alpha^n}{2}, \quad b_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{2\sqrt{2}}$$

である．特に，$a_0 = 1$，$b_0 = 0$ である．

次に，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式を作ると，

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a_n + b_n\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$

$$= (3a_n + 4b_n) + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$$

である．これは，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の漸化式（$*$）と一致し，しかも，

$$x_0 = a_0, \quad y_0 = b_0$$

なので，$\{x_n\}$ と $\{a_n\}$，$\{y_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ数列で，

$$x_n = \frac{\beta^n + \alpha^n}{2} = \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}$$

$$y_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{2\sqrt{2}} = \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

である．よって，P_n の座標は

$$\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2},\ \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\right)$$

である．

*　　　　　　*

x_n，y_n の形は，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ のパラメータ表示

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad (t \geqq 0)$$

から作った C のパラメータ表示

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2\sqrt{2}} \quad (t \geqq 0)$$

の形である．実際，

$$\alpha\beta = (3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}) = 1 \quad \therefore \quad \alpha = \frac{1}{\beta}$$

であり，P_n を表す t は

$$e^t = \beta^n \quad \therefore \quad t = n\log\beta$$

である．

また，（2）から，$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ が表す 1 次変換で双曲線：$x^2 - 2y^2 = 1$ の像は自分自身であり，ゆえに，漸近線 $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ も不変である．これを利用して A^n が求まる：

別解　（3）　$\beta = 3+2\sqrt{2}$，$\alpha = 3-2\sqrt{2}$ とおくと，A は

$$A\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2}+4 \\ 2\sqrt{2}+3 \end{pmatrix}$$

$$= (3+2\sqrt{2})\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\sqrt{2}-4\\2\sqrt{2}-3\end{pmatrix}$$
$$=(3-2\sqrt{2})\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$$

を満たす．これを繰り返して，

$$A^n\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}=\beta^n\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix},\ A^n\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}=\alpha^n\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta^n\sqrt{2}&\alpha^n\sqrt{2}\\\beta^n&-\alpha^n\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad A^n=\begin{pmatrix}\beta^n\sqrt{2}&\alpha^n\sqrt{2}\\\beta^n&-\alpha^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\1&-1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\frac{1}{-2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\beta^n\sqrt{2}&\alpha^n\sqrt{2}\\\beta^n&-\alpha^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{2}\\-1&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^n+\alpha^n}{2}&\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{\sqrt{2}}\\\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{2\sqrt{2}}&\dfrac{\beta^n+\alpha^n}{2}\end{pmatrix}$$

となり，A^n を求めることができた．これから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^n+\alpha^n}{2}\\\dfrac{\beta^n-\alpha^n}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

となり，P_n の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n}{2},\ \frac{(3+2\sqrt{2})^n-(3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\right)}$$

である．

*　　　　　　*

次は，$x^2+y^2=1$，$x^2-y^2=1$ 上の有理点(座標がすべて有理数であるような点)について考えてみよう．

問題 7.　t を $0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数とする．座標平面で，2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{P}_t(0,\ t)$ を結ぶ直線と，曲線 $C: x^2+y^2=1$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ の共有点を Q_t とおく．

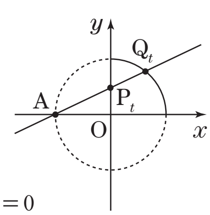
（1）　Q_t の座標を t の式で表せ．

（2）　C 上の有理点をすべて求めよ．

解　（1）　直線 AP_t の方程式は

$$y=t(x+1)$$

であるから，



$$x^2+t^2(x+1)^2=1$$
$$\therefore\quad (x+1)\{(1+t^2)x+(t^2-1)\}=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ (\because\ x\neq -1),$$
$$y=t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\therefore\quad \mathrm{Q}_t\boldsymbol{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

である．

（2）　t が有理数であれば，Q_t は有理点である．

逆に，Q_t が有理点であれば t が有理数であることを示そう．Q_t が有理点としたら，まず，x 座標に注目して，

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}-1$$

は有理数である．ゆえに，$\dfrac{2}{1+t^2}$ は0でない有理数である．すると，y 座標に注目して，

$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}\cdot t$$

が有理数であるから，t も有理数である．

$$\mathrm{Q}_t\text{ が有理点}\quad\Leftrightarrow\quad t\text{ が有理数}$$

であるから，C 上の有理点は，

$$\boldsymbol{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)}\quad \textbf{(} \boldsymbol{t}\ \textbf{は有理数，}\ \boldsymbol{0\leqq t\leqq 1}\textbf{)}$$

である．

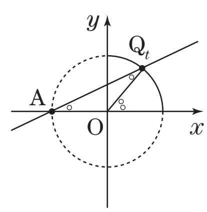
*　　　　　　*

では，パラメータ t の図形的意味を確認しておこう．

$$\mathrm{Q}_t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)=(\cos\theta,\ \sin\theta)\ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと，円周角と中心角の関係から，

$$\angle\mathrm{OAQ}_t=\frac{\theta}{2}\quad\therefore\quad t=\tan\frac{\theta}{2}$$



である．逆に，

$$t=\tan\frac{\theta}{2}\ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

としたら，

$$1+t^2=\frac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\quad\therefore\quad \cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{1+t^2}$$

$$\therefore\quad \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

となる．

このように，$x^2+y^2=1$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ の有理点と，有理数 t $(0\leqq t\leqq 1)$ は，倍角公式を経由して 1 : 1 に対応している．

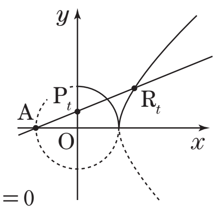
次は，$x^2-y^2=1$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ について考えよう．

問題 8. t を $0 \leqq t < 1$ を満たす実数とする．座標平面で，2点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{P}_t(0,\ t)$ を結ぶ直線と，曲線 $C : x^2 - y^2 = 1\ (x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ の共有点を R_t とおく．

（1） R_t の座標を t の式で表せ．

（2） C 上の有理点をすべて求めよ．

解 （1） 直線 AP_t の方程式は



$$y = t(x+1)$$

であるから，

$$x^2 - t^2(x+1)^2 = 1$$

$$\therefore\quad (x+1)\{(1-t^2)x - (t^2+1)\} = 0$$

$$\therefore\quad x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\ (\because\ t \fallingdotseq \pm 1,\ x \fallingdotseq -1),$$

$$y = t\left(\frac{1+t^2}{1-t^2} + 1\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{R}_t\left(\boldsymbol{\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \frac{2t}{1-t^2}}\right)$$

である．

（2） t が有理数であれば，R_t は有理点である．

逆に，R_t が有理点であれば t が有理数であることを示そう．R_t が有理点としたら，まず，x 座標に注目して，

$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2}{1-t^2} - 1$$

は有理数である．ゆえに，$\dfrac{2}{1-t^2}$ は0でない有理数である．すると，y 座標に注目して，

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{2}{1-t^2} \cdot t$$

が有理数であるから，t も有理数である．

$$\mathrm{R}_t \text{ が有理点} \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ が有理数}$$

であるから，C 上の有理点は，

$$\boldsymbol{\left(\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \frac{2t}{1-t^2}\right)} \quad \textbf{(}\boldsymbol{t}\ \textbf{は有理数，}\ \boldsymbol{0 \leqq t < 1}\textbf{)}$$

である．

*　　　　　*

単位円の場合とほぼ同じ解答となった．

図形的に解釈していこう．結果から分かる通り，

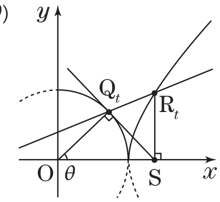
$$\mathrm{A}(-1,\ 0),\ \mathrm{P}_t(0,\ t),$$

$$\mathrm{Q}_t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right),\ \mathrm{R}_t\left(\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \frac{2t}{1-t^2}\right)$$

は，同一直線上にある．さらに，

$$t = \tan\frac{\theta}{2}\ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

となる θ をとると，$\mathrm{Q}_t(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であり，



$$\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{1}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1}{\cos\theta},$$

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\dfrac{2t}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\therefore\quad \mathrm{R}_t\left(\frac{1}{\cos\theta},\ \tan\theta\right)$$

である．図形的には，Q_t における円 $x^2 + y^2 = 1$ の接線

$$(\cos\theta)x + (\sin\theta)y = 1$$

と x 軸の交点 S が $\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ であり，

$$\mathrm{SQ}_t = \mathrm{SR}_t = \tan\theta$$

となっている (上図参照)．

最後に，双曲線 C のもう1つのパラメータ表示

$$x = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2},\ y = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}\ (\varphi \geqq 0)$$

を考える．これらは双曲線関数 (hyperbolic function) と呼ばれ，

$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2},\ \sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}$$

と表す (双曲余弦，双曲正弦)．もちろん，双曲正接は

$$\tanh\varphi = \frac{\sinh\varphi}{\cosh\varphi} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}$$

である．これらは，三角関数と類似の性質を多くもつが，上記の関連として，以下を挙げておこう：

$$\mathrm{R}_t\left(\frac{1+t^2}{1-t^2},\ \frac{2t}{1-t^2}\right) = (\cosh\varphi,\ \sinh\varphi)\ (\varphi \geqq 0)$$

とおくと，

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \frac{1+t^2}{1-t^2}\ (t \geqq 0,\ \varphi \geqq 0)$$

より

$$(e^{\varphi} + e^{-\varphi})(1-t^2) = 2(1+t^2)$$

$$(e^{\varphi} + 2 + e^{-\varphi})t^2 = e^{\varphi} - 2 + e^{-\varphi}$$

$$\therefore\quad t^2 = \frac{e^{\varphi} - 2 + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + 2 + e^{-\varphi}} = \frac{\left(e^{\frac{\varphi}{2}} - e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^2}{\left(e^{\frac{\varphi}{2}} + e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^2}$$

$$\therefore\quad t = \frac{e^{\frac{\varphi}{2}} - e^{-\frac{\varphi}{2}}}{e^{\frac{\varphi}{2}} + e^{-\frac{\varphi}{2}}} = \tanh\frac{\varphi}{2}$$

である．

これは，$\mathrm{Q}_t(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が半角の正接 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ で表されるのと同様である．

（よしだ　のぶお，予備校講師）