

強者の戦略

解説編です。今回も問題の和訳、解法の流れを日本語で確認、そして解答を英語で作成というプロセスを進めていきます。それにしても指数対数は英語で読むのが大変です。全部読めますか？

【Problem】

If $x > 1$, compute the minimum positive value of $\log_2 x^2 + \log_x 4$.

<問題文を和訳>

【問題】

$x > 1$ のとき、 $\log_2 x^2 + \log_x 4$ の最小値を求めよ。

<解法の流れを確認>

底をそろえると、 $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$ 、 $\log_x 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 x}$ となる。次に $z = \log_2 x$ と仮定すれば $2z + \frac{2}{z}$ となり、相加相乗平均を使えば答がでるので、問題としては極めてシンプルです。

<英語で解答を作成>

【数学用語】

とにかくにも用語を知らねば説明できません。まずは用語を見ていきましょう。しかしその前に分数。皆さんは、 $\frac{1}{2}$ を“one half”、 $\frac{1}{3}$ を“one third”、 $\frac{2}{3}$ を“two thirds”と読むのは知っていることでしょう。しかし、 $\frac{a}{b}$ はなんと読みますか？分数には確かに分子を基数、分母を序数で表す方法もありますが、これは“a over b”と読みます。これで $\frac{\log_2 4}{\log_2 x}$ の分数の読み方は分かりました。次に指数・対数の読み方。

$5^2 = \text{five squared}$

$5^3 = \text{five cubed / five to the third power}$

$x^2 = x \text{ squared}$

$x^3 = x \text{ cubed / } x \text{ to the third power}$

$x^n = x \text{ to the } n\text{th (power) / } x \text{ to the (power) } n$

$x^{1/2} = \sqrt{x} = x \text{ to the half power / the square root of } x$

$x^{1/3} = \text{the cube root of } x$

$x^{1/n} = \text{the } n\text{th root of } x$

$\log x = \text{the log of } x$

$\log_2 x = \text{the log of } x \text{ to the base two / the binary log of } x$

(ここから分かる通り、「底」は base といいます。)

以上の読み方は、この問題の「解答」には必要ない知識ですが、英語で数学を扱うには不可欠です。

強者の戦略

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b xn = n \log_b x$$

や、底の変換公式 (change of base formula)

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

といった対数法則は、英語で laws of logarithms といいいます。また、相加相乗平均 the Arithmetic Mean-Geometric Mean inequality (略式: the AM-GM inequality) も解答で用いていますので、使い方をよく見ておいてください。

【与式の簡約化】

では対数法則 (laws of logarithms) を使って底をそろえましょう (change of base)。「対数法則を使って」を副詞節を用いて表現してもいいですが、特に重要な情報でもありませんし分詞構文を使って文章を軽量化しましょう。(Using the laws of logarithms, we have ~.) さらに、底をそろえた後は $z = \log_2 x$ と置いて数式を単純化させます。「～と (仮定) する」は前回扱いましたので、使役動詞 let がすんなり出てくるでしょう。「与式」は直訳すれば the assigned equation ですが、あまり使われないので今回は our expression と書きました。(we have ~ を2文続けて使うのは好ましくないからです。) そしてその our expression が単純化 (simplify) できる、と表記します。(分数を約分したり方程式の項をくくったりすることを日本語で「簡約する」といいいますが、英語では simplify といいいます。)

【相加相乗平均】

相加相乗平均 (AM-GM inequality) は

If $x_1, \dots, x_n > 0$, then

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

with equality if and only if $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

と書きます。ここで注目したい英語表現が “if and only if” です。これは「もし、そして、その場合に限り」と訳され、数学・論理的な記述で『必要十分条件』を示すのに用いられます。例えば、

A number is divisible by 6 if and only if it is divisible by both 2 and 3.

(ある数が6で割り切れることは、その数が2でも3でも割り切れるための必要十分条件である) というように使うのですが、これは即ち、A if and only if B とあれば、それは「A と B は論理的に同値である」といえます。

2006 年京都大学入試問題に、このような英文 (和訳問題、一部抜粋) がありました。文脈等なしになりますが、少し和訳を考えてみてください。

According to the rules of reason, a given conclusion is to be deemed true if, and only if, it flows from a logical sequence of thoughts founded on sound initial premises.

強者の戦略

「AはBのための必要十分条件」、「AとBが理論的に同値」であることを意識すれば、

A = a given conclusion is to be deemed true

(ある特定の結論は、真であると考え(られ)るべきである)

B = it flows from a logical sequence of thoughts founded on sound initial premises

(それが、理にかなった最初の前提に基づいた一連の論理的思考から生じている)

となります。そして必要十分条件ということは、Bが成り立たない限りAではないし、逆もまた然りということ。このような英語表現と数学用語との関連を知ることによって、英文の論理がより明確になります。

理性の法則に従えば、ある特定の結論は、正しい最初の前提に基づいた一連の論理的思考から生じた場合、そしてまたその場合のみ、真であると考えるべきなのである。

さて、少し脱線しましたが相加相乗平均の with equality if and only if $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ はどういうことでしょうか。equality (等式) と $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ が理論的に同値なのですから、つまり等号は $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ のときのみ成立する、ということになります。

【解答のまとめ】

数学において「～について」は前置詞 for を使って表すのが一般的です。(For further information, please contact OOO-XXXX. 「詳細に関してはOOO-XXXXにお問い合わせください。」などといった使い方を for はしますね。) また、「相加相乗平均より」は「相加相乗平均を使う(適用する)ことによって」ということですから、apply を使います。これに前置詞 by を組み合わせて相加相乗平均を表記し、等号成立条件 ($2z = \frac{2}{z}$) を述べ、その式から得られる $z = 1$ を分詞構文で繋げています。(このとき、 $z > 0$ を since で繋げていますが、その理由は前回学んだので分かるはずです。)

<あとがき>

いかがでしたでしょうか。数学は勿論のこと、英語も論理を追っていく学問。数学における論理的表現を学習することによって、新たな英文読解の視点を培っていきましょう。ではまた。

【Solution】

Using the laws of logarithms, we have $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$ and $\log_x 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 x} = \frac{2}{\log_2 x}$. If we let $z = \log_2 x$, our

expression can be simplified to $2z + \frac{2}{z}$. For z ($z > 0$), by applying the AM-GM inequality, we find

$$2z + \frac{2}{z} \geq 2\sqrt{2z \cdot \frac{2}{z}} = 4$$

with equality if and only if $2z = \frac{2}{z}$, giving $z = 1$, since $z > 0$. Thus the final value is $2z + \frac{2}{z} = 4$.