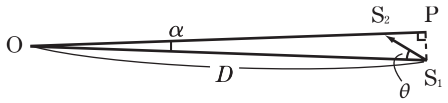
強者の戦略

第１３回に引き続き，藤原です。第１４回目は第１３回目で紹介した，２００２年度東大後期　総合科目Ⅱの問題「物体の見かけの速さ」の解説を掲載したいと思います。模範解答と＜考察＞を記載しました。＜考察＞では，問題を解く上で踏まえて置きたい物理的な思考などについて，記述しています。物理学習を行う上での参考となれば幸いです。

【解答解説】

(1)

物体の運動について，O からみた回転角を $\alpha[rad]$



とすると，$\alpha = 5.6 \times 10^{-7} \times \dfrac{2\pi}{360}$　である。

また文中で定義された，見かけの移動距離（上図中の$\overline{\mathrm{S_1P}}$）について，α が微少角であるので，半径 D，中心角 α の円弧の長さと近似的に等しいと考えて，$\overline{\mathrm{S_1P}} \fallingdotseq D\alpha$，よって見かけの速さ

$$v = \frac{D\alpha}{9.5\times10^{7}} = \frac{3.0\times10^{25}\times5.6\times10^{-7}}{9.5\times10^{7}}\times\frac{2\pi}{360}$$
$$= 3.08\cdots\times10^{9}$$
$$\fallingdotseq 3.1\times10^{9}\ [m/s]$$

また，$\dfrac{v}{c} = \dfrac{3.08\times10^{9}}{3.0\times10^{8}} = 1.02\cdots\times10^{1} \fallingdotseq 10$[倍]

（注：上の計算は $\pi = 3.14$ を用いて計算している。また，$\overline{\mathrm{S_1P}}$の長さは，微少角における三角関数の一次近似 $\overline{\mathrm{S_1P}} = D\sin\alpha \fallingdotseq D\alpha$ と考えてもよい。）

＜考察＞

（1）の計算は，物体が $\mathrm{S_1}$, $\mathrm{S_2}$ に在った時刻 t_1, t_2 と，点 O の観測者がそれを「見た」時刻を等しいものとし，$t_2 - t_1 = 9.5\times10^{7}[s]$，$v = \dfrac{D\alpha}{t_2 - t_1}$ で計算している。しかし（1）以降の問題文中でも述べられているが，これは誤った仮定である。

観測者が $\mathrm{S_1}$ にいる物体を「見た」とき，それは過去の姿であって，実際にはその瞬間，物体はすでに $\mathrm{S_1}$ にはいない。物体が光波を発してから，観測者が光波を受け取る（すなわち「見る」）までに時間が掛かる為である。

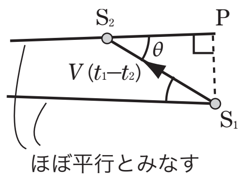
よって，物体が $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ に在った時刻を t_1，t_2，点 O の観測者がそれを「見た」時刻を t'_1，t'_2 と別に定めて，$t'_2 - t'_1 = 9.5\times10^{7}[s]$，$v = \dfrac{D\alpha}{t'_2 - t'_1}$ と考えるのが正しい。この正しい計算をおこなっているのが(2)～（4）である。

(2)

$\overline{\mathrm{S_1O}} = D$ であるので，光波が $\mathrm{S_1}$ で出発してから O に達するまでの時間は $\dfrac{D}{c}$ であり，よって

$$t'_1 = t_1 + \frac{D}{c}$$

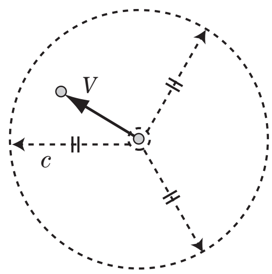
(3)



$\overline{\mathrm{S_2O}} = D - V(t_2 - t_1)\cos\theta$ であるので，光波が $\mathrm{S_2}$ を出発してから O に達するまでの時間は $\dfrac{D - V(t_2 - t_1)\cos\theta}{c}$ であり，よって

$$t'_2 = t_2 + \frac{D - V(t_2 - t_1)\cos\theta}{c}$$

＜考察＞



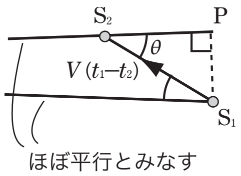
ある点光源から発せられた光波は，媒質が変化しない限り，出発点を中心とした球面波で広がり，単位時間当たりに半径が c 広がる。

これは光源（物体）が動きながら光波を発する場合も同様である。光源（物体）の運動と，光波の伝播速度は関係しておらず，各々独立していることに注意すべきである。

(4)

(2)(3) より，

$$t_2' - t_1' = t_2 - t_1 - \frac{V(t_2 - t_1)\cos\theta}{c}$$



また，$\overline{\mathrm{S_1P}}$を，$D\alpha$ を用いずに V, θ などで表すと，$\overline{\mathrm{S_1P}} = V(t_2 - t_1)\sin\theta$ であるので，見かけの速さ v は，

$$v = \frac{\overline{\mathrm{S_1P}}}{t_2' - t_1'} = \frac{V\sin\theta}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta}$$

となる。

＜考察＞

物体の方向の実際の速さは $V\sin\theta$ である。しかし実際の移動時間 $t_2 - t_1$ と異なり，観測者からは時間 $t_2' - t_1'$ で物体が $\mathrm{S_1}$ から $\mathrm{S_2}$ に移動したように見えるので，観測者からは物体が異なる速さで移動して見える。(5) ～ (7) では，見かけの速さ v が，V または光速 c よりも速く見える為の条件を，数学的に導きだしている。

(5)

求める条件は $v > V$ より，

$$\frac{V\sin\theta}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta} > V \qquad \cdots \text{(i)}$$

また，$V < c$ としているので，$1 - \frac{V}{c}\cos\theta > 0$

よって (i) を変形して，

$$\sin\theta > 1 - \cos\theta$$

さらに，$V < c$ から，両辺は共に正の数であるので，両辺を 2 乗しても同値となり，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ を用いて，正弦を消去すると，

$$1 - \cos^2\theta > 1 - \frac{2V}{c}\cos\theta + \left(\frac{V}{c}\right)^2\cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta\left\{\left(1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2\right)\cos\theta - \frac{2V}{c}\right\} < 0$$

$$\therefore \quad 0 < \cos\theta < \frac{\frac{2V}{c}}{1 + \left(\frac{V}{c}\right)^2}$$

また，$v < V$ となるのは，見かけの移動時間が，実際の移動時間より短いとき，すなわち $t_2' - t_1' < t_2 - t_1$ のときに起こりうる。よって

$$\frac{D}{c} > \frac{D - V(t_2 - t_1)\cos\theta}{c}$$

$$\Leftrightarrow D > D - V(t_2 - t_1)\cos\theta$$

のときであり，これは物体が観測者に近づく場合である。

(6)

求める条件は $v > c$ より，

$$\frac{V\sin\theta}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta} > c \cdots \text{(ii)}$$

また，$V < c$ としているので，$1 - \frac{V}{c}\cos\theta > 1$

よって (ii) を変形して，

$$V\sin\theta > c - V\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow V > \frac{c}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{c}{\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

よって，V の最小値は，$\theta = \frac{\pi}{4}$ のときで $\frac{c}{\sqrt{2}}$

またこのとき，$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(7)

（4）の式を変形して，

$$V=\frac{cv}{c\sin\theta+v\cos\theta}=\frac{cv}{\sqrt{c^2+v^2}\sin(\theta+\alpha)}$$

（ただし，$\tan\alpha=\dfrac{v}{c}$）

よって，V の最小値は，$V=\dfrac{cv}{\sqrt{c^2+v^2}}$ より，

$$\frac{V}{c}=\frac{v}{\sqrt{c^2+v^2}}$$

ここで（1）の値より，v は c より非常に大きい事を考慮して，一次近似を用いると，

$$\frac{V}{c}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{c}{v}\right)^2}}$$

$$\fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{v}\right)^2=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2=\frac{199}{200}$$

＜最後に＞

以上の問題は，（2）～（4）において波動の伝播に関する物理的理解力，（5）～（7）において V と θ を変数として捉えて処理していく，数学的解析力が試されている。

特に前半の問題には注意してもらいたい。このような,「波が発する時刻」と「波が受け取られる時刻」を考察する問題は，ドップラー効果を考えるときにも良く問われるテーマで，難関大の前期試験物理問題にも度々出題されているのが見うけられる。

ポイントとしては，「波源から出発した後の波の伝播速度は，波源の運動の影響とは関係せずに独立している」の一点である。波の移動を，力学におけるの質点の運動と混同して捉えるのではなく，多次元的にどのような伝わり方をしていくのかを，視覚的に理解しておいてもらいたい。