

強者の戦略

第17回の解答編です。本問は「フェーン現象」を題材としています。フェーン現象とは、湿った空気塊が背の高い山岳を通過すると、その前後で温度が上昇する現象です。言うまでもなく、これは空気塊中の水蒸気が凝結することによって発生する凝結熱が大きな役割を果たします。本問では、発生する凝結熱は与えられています。それと熱力学の諸法則を用いて、フェーン現象の概要を見ていこうというものです。では、解答に移りましょう。

ア

熱力学第1法則より、

$$Q = 1 \times cR \times \Delta T + P\Delta V = cR\Delta T + P\Delta V \rightarrow \text{①}$$

イ

状態方程式より、

$$P\Delta V = 1 \times R\Delta T \quad \therefore \Delta V = \frac{R}{P}\Delta T \rightarrow \text{②}$$

ウ

上2式より、

$$Q = cR\Delta T + P \times \frac{R}{P}\Delta T = (c+1)R\Delta T \rightarrow \text{③}$$

エ

体積 V 、温度 T の気体の断熱過程において、体積が微量 ΔV 、温度が微量 ΔT 変化したとする。問題文で与えられた式（ポアッソンの法則）より、

$$\begin{aligned} TV^{\frac{1}{c}} &= (T + \Delta T)(V + \Delta V)^{\frac{1}{c}} \\ &= TV^{\frac{1}{c}} \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \left(1 + \frac{\Delta V}{V}\right)^{\frac{1}{c}} \\ &\doteq TV^{\frac{1}{c}} \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\Delta V}{V}\right) \\ &\doteq TV^{\frac{1}{c}} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta T}{T}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta V = -\frac{cV}{T}\Delta T$$

状態方程式より、

$$PV = RT \quad \therefore \frac{V}{T} = \frac{R}{P}$$

2式より、

$$\Delta V = -\frac{cR}{P}\Delta T \rightarrow \text{④}$$

オ

①, ④より、

$$Q = cR\Delta T + P \times \left(-\frac{cR}{P}\Delta T\right) = 0$$

カ

状態方程式より、Aでの気体の体積は $\frac{RT_A}{P_A}$ 、B

での気体の体積は $\frac{RT_B}{P_B}$ であるので、問題文で与え

られた式（ポアッソンの法則）より、

$$P_A \left(\frac{RT_A}{P_A}\right)^{\frac{c+1}{c}} = P_B \left(\frac{RT_B}{P_B}\right)^{\frac{c+1}{c}}$$

$$\therefore T_B = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{1}{c+1}} T_A$$

キ

B → C は定圧変化であることに注意して、③より、

$$L = (c+1)R\Delta T \quad \therefore \Delta T = \frac{L}{(c+1)R}$$

→ ⑤

ク

仕事を W として、②, ⑤より、

$$W = P_B \times \left\{ \frac{R}{P_B} \times \frac{L}{(c+1)R} \right\} = \frac{L}{c+1}$$

ケ

Dにおける温度を $\Delta T_A'$ として、C → Dにおいてポアッソンの法則より、

$$P_B \left\{ \frac{R(T_B + \Delta T)}{P_B} \right\}^{\frac{c+1}{c}} = P_A \left(\frac{RT_A'}{P_A} \right)^{\frac{c+1}{c}}$$

強者の戦略

$$\begin{aligned}\therefore T_A' &= \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1}{c+1}} (T_B + \Delta T) \\ &= T_A + \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1}{c+1}} \frac{L}{(c+1)R} \rightarrow \text{⑥}\end{aligned}$$

コ

AとDを比較すると、圧力は同じであるが温度はDの方が高い。よって状態方程式よりDの方が体積は大きい。

サ

水蒸気の凝結がない場合には、⑥にて $L=0$ とすればよい。このとき、 $T_A'=T_A$ となるので、AとDにおいて体積は同じとなる。よって、 $A \rightarrow D$ で気体がした仕事は0である。

いかがでしたか？ ケの⑥式が、本問の仮定（上昇（断熱膨張） \rightarrow 水平移動（定圧膨張） \rightarrow 下降（断熱圧縮））におけるフェーン現象の温度上昇を表したものになっていますね。

余談ですが、実際のフェーン現象においては上昇の途中で空気塊が飽和し、凝結熱が発生します。すなわち、山岳を通過する際には、

1. 上昇（空気不飽和・断熱膨張）
2. 上昇（空気飽和・潜熱の放出を伴う定圧でない膨張）
3. 下降（空気不飽和・断熱圧縮）

という1 \rightarrow 2 \rightarrow 3の現象が連続的に起こるわけ değildir。この場合の議論はかなり興味深いもので、私も大学生のときに気象学の参考書で詳しく学んだ経験があります。興味のある人は気象学の名著「一般気象学」（小倉義光・東京大学出版会）に、乾燥断熱減率・湿潤断熱減率というキーワードで詳しく掲載されていますから、参考してみてくださいね。