「もしも 2011 年東京大学（理科）数学に誘導がなかったら？」

研伸館数学科
吉田　信夫

2011 年の東大理科数学の問題は，例年通り，総合的な数学力を測ることを目的としたもので，十分にその役割を果たしている．特に処理力を問う度合いが増していたような印象であった．

その中の奇数番目の問題達は，実は，小問を無くして考えると面白い解法を見いだすことができる．キッチリした解答は後日提供するので，本稿では，そのような解法を紹介していきたい．

まずは，第 1 問から．

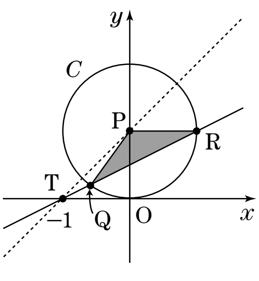
問題 1．座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする．a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする．

（1） △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ．

（2） a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ．

（1）で $S(a)$ を求めると，（2）は数学Ⅲの微分の問題になる．ここでは，（2）の答えだけを求めていく．

解 $y=a(x+1)$ は定点 T(−1, 0) を通り，傾き a の直線なので，$0<a<1$ のとき，△PQR は存在する．



△PQR は PQ＝PR＝1 の二等辺三角形で，∠QPR は $0°<$∠QPR$<180°$ の範囲を変化する．

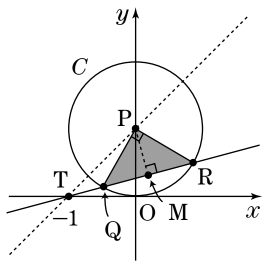
$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\angle\mathrm{QPR}=\frac{1}{2}\sin\angle\mathrm{QPR}$$

なので，∠QPR＝90° のとき，$S(a)$ は最大になる．

このとき，線分 QR の中点を M とすると，

$$\mathrm{TP}=\sqrt{2},\ \mathrm{PM}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\therefore\quad \mathrm{TP}:\mathrm{PM}=2:1$$

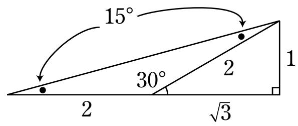
であり，∠PMT＝90° であるから，∠PTM＝30° である．



よって，求める a は

$$\begin{aligned}a&=\tan(45°-30°)\\&=\tan 15°\\&=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\\&=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

である．



＊　　　＊

（1）が無ければ，多くの人はこちらの解法を選ぶのではないだろうか．ちなみに，

$$S(a)=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

である．計算は省略するが，

$$S'(a)=\cdots\cdots\cdots=\frac{(a+1)(a^2-4a+1)}{\sqrt{2a}(a^2+1)^2}$$

となり，

$$a^2-4a+1=0\ \ (0<a<1)\quad\therefore\quad a=2-\sqrt{3}$$

から，増減が分かる．

＊　　　＊

では，次は第３問．（２）で“曲線の長さ”を求めているが，高校数学範囲外 (数年後に解禁) であるため，単なる積分計算として出題されている．

問題 2．L を正定数とする．座標平面の x 軸上の正の部分にある点 P(t, 0) に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を Q($u(t)$, $v(t)$) と表す．

（1） $u(t)$，$v(t)$ を求めよ．

（２） $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分

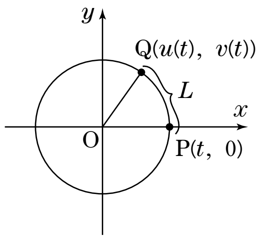
$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ．

（３） 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ．

（２）の計算をせずに，（３）だけを考えよう．

解（１）半径 t の円周上を反時計回りに角度 θ 分だけ移動すると，道のりは $t\theta$ である．これが L となるとき，$\theta=\dfrac{L}{t}$ である．よって，



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad u(t)=t\cos\frac{L}{t},\quad v(t)=t\sin\frac{L}{t}$$

である．ゆえに，$f(a)$ の被積分関数の根号内は

$$u'(t)=\cos\frac{L}{t}+t\left(\frac{-L}{t^2}\right)\left(-\sin\frac{L}{t}\right)=\cos\frac{L}{t}+\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t},$$

$$v'(t)=\sin\frac{L}{t}+t\left(\frac{-L}{t^2}\right)\cos\frac{L}{t}=\sin\frac{L}{t}-\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2\\ &=\cos^2\frac{L}{t}+2\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}+\frac{L^2}{t^2}\sin^2\frac{L}{t}\\ &\quad+\sin^2\frac{L}{t}-2\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}+\frac{L^2}{t^2}\cos^2\frac{L}{t}\\ &=1+\frac{L^2}{t^2}\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\frac{L^2}{t^2}<1+\frac{L^2}{t^2}<\left(1+\frac{L}{t}\right)^2$$

$$\therefore\quad \int_a^1\frac{L}{t}dt<f(a)=\int_a^1\sqrt{1+\frac{L^2}{t^2}}dt<\int_a^1\left(1+\frac{L}{t}\right)dt$$

であり，

$$\int_a^1\frac{L}{t}\,dt=[L\log t]_a^1=-L\log a,$$

$$\int_a^1\left(1+\frac{L}{t}\right)dt=[t+L\log t]_a^1=1-a-L\log a$$

である．$a\to+0$ のとき $\log a<0$ なので，

$$-L\log a<f(a)<1-a-L\log a$$

の両辺を $\log a$ で割ると，

$$-L>\frac{f(a)}{\log a}>\frac{1-a}{\log a}-L$$

となる．さらに，

$$\lim_{a\to+0}\left(\frac{1-a}{\log a}-L\right)=-L$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=-L$$

である．

＊　　　　　＊

（２）を計算するには，$\dfrac{L}{t}=\tan x$ と置換するなどの方法になる．このとき，$t=1$，a となる x を自分で $x=\alpha$，β などとおかなければならない．

（２）を計算して得られる答えは

$$\begin{aligned}f(a)=&\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}-L\log\left(L+\sqrt{1+L^2}\right)\\ &+L\log\left(L+\sqrt{a^2+L^2}\right)-L\log a\end{aligned}$$

である．これが出れば，（３）は簡単に分かる．

＊　　　　　＊

では，最後に第５問にいってみよう．これには，通常の解法も挙げておく．

問題 3. p，q を２つの正の整数とする．整数 a，b，c で条件

$$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p,\ \ b\leqq c\leqq a$$

を満たすものを考え，このような a，b，c を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ．各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して

$$w([a,\ b\,;c])=p-q-(a+b)$$

とおく．

（１） $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c])=-q$ となるものの個数を求めよ．また，$w([a,\ b\,;c])=p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ．

以下，$p=q$ の場合を考える．

（２） s を整数とする．$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c])=-p+s$ となるものの個数を求めよ．

（３） $(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ．

解（1）　まず，$w([a,\ b\,;c])=-q$ つまり

$$p-q-(a+b)=-q \quad \therefore \quad a+b=p$$

となる条件は，$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$ より，

$$a=p,\ b=0$$

である．このとき，$0\leqq c\leqq p$ より，

$\boldsymbol{p+1}$　（個）

である．

　次に，$w([a,\ b\,;c])=p$ つまり

$$p-q-(a+b)=p \quad \therefore \quad a+b=-q$$

となる条件は，$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p$ より，

$$a=0,\ b=-q$$

である．このとき，$-q\leqq c\leqq 0$ より，

$\boldsymbol{q+1}$　（個）

である．

（2）　$a+b$ の範囲は $-p\leqq a+b\leqq p$ なので，

$$-p\leqq w([a,\ b\,;c])\leqq p$$

である．よって，

$\boldsymbol{s<0}$ または $\boldsymbol{s>2p}$ のとき 0 個

である．以下，$0\leqq s\leqq 2p$ のときを考える．このとき，

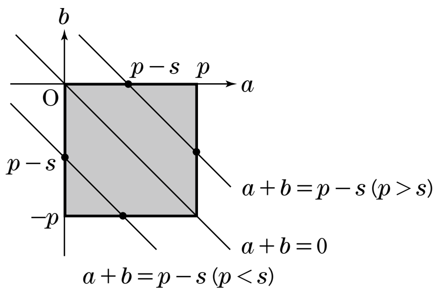
$$a+b=p-s \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

であり，a，b を決めたら，c の決め方は

$a-b+1$　（通り）

である．

　$(a,\ b)$ を ab 平面の格子点と考える．すると，$(*)$ は直線を表す．



　$\boldsymbol{0\leqq s\leqq p}$ のとき，$(*)$ を満たす a，b は

$$(a,\ b)=(p-s,\ 0),\ (p-s+1,\ -1),\ \cdots\cdots\cdots,\ (p,\ -s)$$

の $s+1$ 組である．それぞれの組に対して，個数は

$$p-s+1,\ p-s+3,\ \cdots\cdots\cdots,\ p+s+1$$

なので，等差数列の和の公式から，個数は

$$(p-s+1)+(p-s+3)+\cdots\cdots\cdots+(p+s+1)$$
$$=\frac{(s+1)\{(p-s+1)+(p+s+1)\}}{2}$$
$$=\boldsymbol{(s+1)(p+1)}$$

となる．

　$\boldsymbol{p<s\leqq 2p}$ のとき，$(*)$ を満たす a，b は

$$(a,\ b)=(0,\ p-s),\ (1,\ p-s-1),\ \cdots\cdots\cdots,\ (2p-s,\ -p)$$

の $2p-s+1$ 組である．それぞれの組に対して，個数は

$$s-p+1,\ s-p+3,\ \cdots\cdots\cdots,\ 3p-s+1$$

なので，等差数列の和の公式から，個数は

$$(s-p+1)+(s-p+3)+\cdots\cdots\cdots+(3p-s+1)$$
$$=\frac{(2p-s+1)\{(s-p+1)+(3p-s+1)\}}{2}$$
$$=\boldsymbol{(2p-s+1)(p+1)}$$

となる．

（3）（2）で求めた $w([a,\ b\,;c])=-p+s$ となるものの個数の総和が $(p,\ p)$ パターンの総数である．

　よって，求める個数は

$$\sum_{s=0}^{p}(s+1)(p+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(2p-s+1)(p+1)$$
$$=(p+1)\{(1+2+\cdots\cdots\cdots+p)+(p+1)\}$$
$$+(p+1)\{p+(p-1)+\cdots\cdots\cdots+1\}$$
$$=(p+1)\left\{2\cdot\frac{p(p+1)}{2}+(p+1)\right\}$$
$$=\boldsymbol{(p+1)^3}$$

である．

＊　　　　　＊

　（2）のおき方のおかげで，和の計算がスムーズになった．もっと興味深いのは，答えの形である．

　例えば，$p=1$ のとき，条件は

$$-1\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq 1,\ b\leqq c\leqq a$$

であり，

$$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (1,\ -1),\ (0,\ 0),\ (0,\ -1)$$

のそれぞれについて，c の個数 $(a-b+1)$ が

$$2,\ 3,\ 1,\ 2$$

なので，総数は

$$2+3+1+2=8$$

である．$p=2$ のときも，

$$-2\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq 2,\ b\leqq c\leqq a$$

であり，

$(a,\ b)=(2,\ 0),\ (2,\ -1),\ (2,\ -2),$

$(1,\ 0),\ (1,\ -1),\ (1,\ -2),$

$(0,\ 0),\ (0,\ -1),\ (0,\ -2)$

のそれぞれについて，c の個数 $(a-b+1)$ が

$3,\ 4,\ 5,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3$

なので，総数は

$$3+4+5+2+3+4+1+2+3=27$$

である．

確かに立方数になっている．

これに気付いたら，（２）を用いずに（３）を考えることができるのではないだろうか．

別解　$(p,\ p)$ パターンのパターンの総数を a_p とおく．

$$a_p=(p+1)^3$$

を示す．

まず，$(p,\ p)$ パターンのうち $(p-1,\ p-1)$ パターンでないものを考える．そのような $a,\ b$ は

$a=p$　または　$b=-p$

である ($a=p$ かつ $b=-p$ が重複していることに注意)．

・$a=p$ かつ $b=-p$ のとき，

$$-p\leqq c\leqq p$$

より，$2p+1$ 個ある．

・$b=-p$ かつ $a\neq p$ のとき，各 a に対し，

$$-p\leqq c\leqq a$$

より，$a+p+1$ 個あるので，個数は全部で

$$\sum_{a=0}^{p-1}(a+p+1)=\frac{p\{(p+1)+(2p)\}}{2}=\frac{3p^2+p}{2}$$

である．

・$a=p$ かつ $b\neq -p$ のときも上と同数ある．

よって，

$$a_p=a_{p-1}+2p+1+2\cdot\frac{3p^2+p}{2}$$
$$=a_{p-1}+3p^2+3p+1\quad(p\geqq 2)$$

である．この漸化式を利用して，数学的帰納法によって証明する．

１）　$p=1$ のときは成り立つ．

２）　$p=k-1$ $(k\geqq 2)$ のとき

$$a_{k-1}=k^3$$

が成り立つと仮定する．すると，

$$a_k=a_{k-1}+3k^2+3k+1=k^3+3k^2+3k+1$$
$$=(k+1)^3$$

であるから，$p=k$ でも成り立つ．

１），２）から，数学的帰納法により，

$$a_p=(p+1)^3$$

が示された．

よって，総数は $\boldsymbol{(p+1)^3}$ 個である．

⇨　注１：漸化式

$$a_1=8,\ a_p=a_{p-1}+3p^2+3p+1$$

から，一般項を求めることもできる：

$p\geqq 2$ のとき，

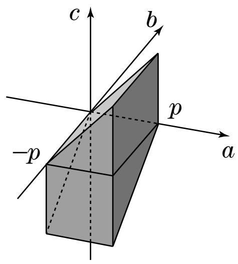
$$a_p=a_1+\sum_{k=2}^{p}(3k^2+3k+1)$$
$$=8+\sum_{k=1}^{p}(3k^2+3k+1)-7$$
$$=1+\frac{3}{6}p(p+1)(2p+1)+\frac{3}{2}p(p+1)+p$$
$$=(p+1)^3$$

である．これは $p=1$ でも成り立つ．

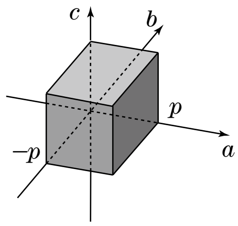
⇨　注２：本問は，立体

$$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p,$$
$$b\leqq c\leqq a$$

に含まれる格子点の個数である．この立体を図にすると右のようになる．



上面と下面にある格子点の個数は等しく，しかも，ab 平面上の格子点数と一致する．よって，$c\leqq 0$ の部分を図のように移すことで，一辺の長さが p の立方体で格子点数を考えたものと同じになっている．



＊　　　＊

2011 年の東大理科数学の奇数番を，小問設定を気にせず解いてみた (入試答案としては良くないですが…)．誘導によって思考の幅を狭めることには賛否両論であろうが，さすが東大，問題の設定などは非常に興味深い．