数学集中講義

和の有界性証明について　～$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ の上限～

吉田　信夫

大学への数学　12 年 2 月号　掲載

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\,(=1.64493\cdots\cdots\cdots)$$

となることはご存知だろうか？

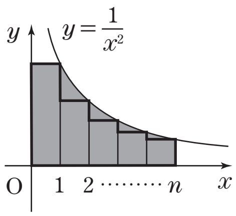
大学以上の数学では証明可能であるが，高校数学の範囲でこれを証明するのは非常に困難である．しかし，これを元にした入試問題は多く存在する．これに関連して，“和の有界性” を示す問題，つまり，「和 $S_n<$ (定数) を示せ」という問題の解法をまとめてみよう．

> **問題** 1.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$ を示せ．

何も誘導がないパターンは，09 東大後期総合科目Ⅱの一部などがある．右辺が n によらない定数であるから，帰納法は不向きで，面積を用いるのが最も簡明である．

解　$n=1$ では明らかに成り立つので，$n\geqq 2$ とする．

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ は，右図の太線で囲まれた部分の面積である．



$y=\dfrac{1}{x^2}$　$(x>0)$ は単調減少であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\\&<1+\int_1^n\frac{dx}{x^2}=1+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=1-\frac{1}{n}-(-1)\\&=2-\frac{1}{n}<2\end{aligned}$$

と評価できる．これで示された．

＊　　　　＊

少し誘導を付けると，数Ⅲを用いずに証明できる．

> **問題** 2.　$k^2>k(k-1)$　$(k\geqq 1)$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$ を示せ．

解　$n=1$ では明らかに成り立つので，$n\geqq 2$ とする．

$k\geqq 2$ のとき，与えられた不等式の逆数をとると，

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}\quad(k\geqq 2)$$

となる．これを用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\\&<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\\&=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots\\&\qquad\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}<2\end{aligned}$$

が成り立つ．これで示された．

＊　　　　＊

問題 1 と同様，$k=1$ だけを別にして足さなければならなかった．これを避けるよう誘導を変化させてみよう．

> **問題** 3.　$k^2>k^2-\dfrac{1}{4}$　$(k\geqq 1)$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$ を示せ．

解　与えられた不等式の逆数をとると，

$$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}\quad(k\geqq 1)$$

となる．これを用いると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}&<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{(2k-1)(2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots\\&\qquad\cdots\cdots+2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=2-\frac{2}{2n+1}<2\end{aligned}$$

が成り立つ．これで示された．

＊　　　　＊

さらに，少し変わった誘導もある (09 岩手大などに類題がある).

問題 4.　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が

$$a_n=\frac{1}{n^2}\ (n\geqq 1)$$

で与えられている．

（1）　自然数 m に対し，

$$\frac{1}{2^{2m}}<a_n\leqq\frac{1}{2^{2(m-1)}}$$

となる n の個数を求めよ．

（2）（1）を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$ を示せ．

解　（1）　$a_n=\dfrac{1}{n^2}$ を代入して，

$$\frac{1}{2^{2m}}<a_n\leqq\frac{1}{2^{2(m-1)}}\iff\frac{1}{2^{2m}}<\frac{1}{n^2}\leqq\frac{1}{2^{2(m-1)}}$$
$$\iff 2^{2(m-1)}\leqq n^2<2^{2m}\iff 2^{m-1}\leqq n<2^m$$

となる．ゆえに，求める n の個数は，

$$2^m-2^{m-1}=\boldsymbol{2^{m-1}}$$

である．

（2）　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ とおく．（1）で得た

$$a_n\leqq\frac{1}{2^{2(m-1)}}\quad(2^{m-1}\leqq n<2^m)$$

を用いると，$N\geqq 1$ に対し，

$$\begin{aligned}
S_{2^N-1}&=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{N-1})^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{(2^N-1)^2}\\
&\leqq 1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}\right)+\cdots\cdots\\
&\qquad\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2^{2(N-1)}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^{2(N-1)}}\right)\\
&=1+2\cdot\frac{1}{2^2}+2^2\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots\cdots+2^{N-1}\cdot\frac{1}{2^{2(N-1)}}\\
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^{N-1}}\\
&=\frac{1-\frac{1}{2^N}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\\
&<2
\end{aligned}$$

である．

$\{S_n\}$ は増加数列なので，すべての n で

$$S_n<2$$

が成り立つことが分かる．これで示された．

＊　　　　＊

和の有界性証明の主な方法はこのようなものである．いずれも面白い誘導だが，1.64493 ………に収束するのを“2 未満”と評価しているのだから，精度が良いとは言い難い．

精度を上げるための 1 つの方法は，最初のいくつかの項をマジメに足すことである．実際，**問題** 1，2 でも $k=1$ の部分はそのままにしていた．

次の 03 防衛大の問題は，ちょっとマジメに足さなければならないような誘導になっている．その中で，“S の収束”を仮定していることに注意しよう．

問題 5.　級数 $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ および $T=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ は収束することが分かっている．S および T の第 n 項までの部分和をそれぞれ S_n，T_n とするとき，次の問いに答えよ．

（1）　T の値を求めよ．

（2）　すべての自然数 n に対し，等式

$T-T_{n-1}=\dfrac{1}{n}$ が成り立つことを示せ．ただし，$T_0=0$ とする．

（3）　すべての自然数 n に対し，不等式

$S-S_n\leqq\dfrac{1}{n}$ が成り立つことを示せ．

（4）　不等式 $1.3<S<1.7$ を示せ．

解　（1）　部分分数分解して部分和 T_N を計算すると，

$$\begin{aligned}
T_N&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&=1-\frac{1}{N+1}
\end{aligned}$$

となるので，

$$T=\lim_{N\to\infty}T_N=\mathbf{1}$$

である．

（2）（1）より，

$$T-T_{n-1}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

である．

（3）（2）がヒントになるはずだから，

$$S-S_n\leqq T-T_{n-1}$$

を示す方向で考える．

S，T が実数として存在することを仮定しているので，

$$\begin{aligned}
&S-S_n\\
&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots\cdots\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&T-T_{n-1}\\
&=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\qquad+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots\cdots\\
&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}
\end{aligned}
$$

となる．ここで，各項について，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}-\frac{1}{(n+k)^2}\\
&=\frac{1}{(n+k)^2(n+k-1)}\\
&>0
\end{aligned}
$$

であるから，級数について，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

$$\therefore\quad S-S_n\leqq T-T_{n-1}=\frac{1}{n}$$

が成り立つ．

（4） $S_n>1.3$ となるまで n に代入していくと，

$$S_1=1,\ S_2=1+\frac{1}{4}=1.25,$$

$$S_3=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{49}{36}=1.3611\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S>S_3>1.3$$

である．さらに，（3）より，

$$S-S_3\leqq\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad S<S_3+\frac{1}{3}=\frac{61}{36}=1.6944\cdots\cdots\cdots<1.7$$

である．以上で示された．

＊　　　　＊

評価の精度はかなり良くなったが，代入して部分和を計算していくのは少し面倒である．

次は，**問題** 1 での“面積による評価”の精度を上げてみよう．

> **問題** 6．次の問いに答えよ．
>
> （1） 自然数 k に対し，$\displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2}>\frac{1}{k^2}$ を示せ．
>
> （2） （1）を利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{5}{3}$ を示せ．

解 （1） 積分を計算することで，

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2}=\left[\frac{-1}{x}\right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{k-\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{k^2-\frac{1}{4}}$$

$$>\frac{1}{k^2}$$

となる．これで示された．

（2） $n=1$ では明らかに成り立つので，$n\geqq2$ とする．

（1）を $k\geqq2$ に適用して，

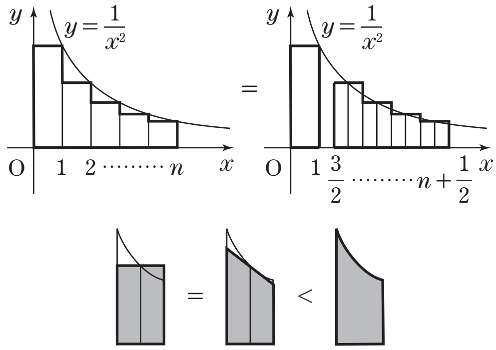
$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2}\\
&=1+\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2}=1+\left[\frac{-1}{x}\right]_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\\
&=\frac{5}{3}-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}<\frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

である．これで示された．

＊　　　　＊

（1）は，**問題** 3 で用いた不等式 $k^2>k^2-\frac{1}{4}\ (k\geqq1)$ と同じ評価である．そのまま（2）を考えると，**問題** 3 と同様，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$ しか示すことはできなかったはずである．そこで，**問題** 1 と同様に，$k=1$ の長方形だけそのままにして足していったのである．

では，**問題** 6（1）の意味は何であろうか．図形化してみると，以下の通りである：



$$\frac{1}{k^2}\quad=\quad\frac{1}{k^2}\quad<\quad\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^2}$$

図の上半分のように，長方形達を右に $\frac{1}{2}$ だけずらす（最も左のものは除く）．そして，図の下半分のように，長方形を台形に等積変形する（接線を利用）と，$y=\frac{1}{x^2}$ の凸性から，（1）の不等式が成り立つことが分かる．

＊　　　　＊

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<\frac{5}{3}=1.666\cdots\cdots\cdots$ は，真の値 $1.64493\cdots\cdots\cdots$ にかなり近く，良い評価である．しかし，入試問題の中には，もっとすごい問題がある．最後に，ギリギリの評価：

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqq \frac{\pi^2}{6}$ を示す問題を紹介しよう．(05 富山医薬大)

問題 7．$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx\ ,\ I_n=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right)^2dx$$

と定義する．

（1） $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，

$a_n=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$ であることを示せ．

（2） $k,\ l=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,dx$ を求めよ．

（3） I_1 を求めよ．

（4） $n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，I_n-I_{n-1} を n を用いて表せ．

（5） $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqq \frac{\pi^2}{6}$ が成立することを示せ．

解 （1） 偶関数であることを利用して，

$$a_n=2\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

である．さらに，部分積分により，

$$\begin{aligned}
a_n&=2\int_0^{\pi} x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)'dx\\
&=2\left\{\left[\frac{-x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{-\cos nx}{n}dx\right\}\\
&=2\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\}\\
&=-\frac{2\pi}{n}\cos n\pi\\
&=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}
\end{aligned}$$

である．これで示された．

（2）「積→和」公式から

$$\sin kx\sin lx=\frac{\cos(k-l)x-\cos(k+l)x}{2}$$

となる．$k\neq l$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,dx\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(k-l)x-\cos(k+l)x}{2}dx\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k-l)x}{k-l}-\frac{\sin(k+l)x}{k+l}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

である．$k=l$ のとき，

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin kx\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2kx}{2k}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&=\boldsymbol{\pi}
\end{aligned}$$

である．

（3） （1）で $n=1$ として，$a_1=2\pi$ である．（1）と（2）を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x-2\pi\sin x)^2\,dx\\
&=\pi^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx-4\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx+4\int_{-\pi}^{\pi}4\sin^2 x\,dx\right)\\
&=\pi^2\left(\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi}-4a_1+4\pi\right)=\pi^2\left(\frac{2\pi^3}{3}-8\pi+4\pi\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{2\pi^5}{3}-4\pi^3}
\end{aligned}$$

である．

（4） まず，I_n-I_{n-1} の被積分関数を，“和と差の積”で因数分解してから，展開すると，

$$\begin{aligned}
&\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right)^2-\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin kx\right)^2\\
&=\left\{\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right)+\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin kx\right)\right\}\\
&\quad\times\left\{\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right)-\left(\pi x-\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin kx\right)\right\}\\
&=\left(2\pi x-2\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin kx-a_n\sin nx\right)(-a_n\sin nx)\\
&=-2\pi a_n x\sin nx-2a_n\sum_{k=1}^{n-1}a_k\sin kx\sin nx\\
&\quad+a_n{}^2\sin^2 nx
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，（1）と（2）を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
&I_n-I_{n-1}\\
&=-2\pi a_n\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx\\
&\quad-2a_n\sum_{k=1}^{n-1}a_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx+a_n{}^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\,dx\\
&=-2\pi a_n\cdot a_n-2a_n\sum_{k=1}^{n-1}a_k\cdot 0+a_n{}^2\cdot\pi=-a_n{}^2\pi\\
&=\boldsymbol{-\frac{4\pi^3}{n^2}}
\end{aligned}$$

である．

（5） （4）から $\{I_n\}$ の階差数列が得られたので，（3）で求めた初項と合わせて，I_n が分かる．$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n&=I_1+\sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{4\pi^3}{k^2}\right)=\frac{2\pi^5}{3}-4\pi^3-4\pi^3\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\\
&=\frac{2\pi^5}{3}-4\pi^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

であり，これは $n=1$ でも成り立つ．$I_n\geqq 0$ なので，

$$\frac{2}{3}\pi^5-4\pi^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\geqq 0\quad\therefore\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqq\frac{\pi^2}{6}$$

が成り立つ．これで示された．

（よしだ　のぶお，予備校講師）