数学集中講義

“逆関数”完全マスター

吉田　信夫

大学への数学　12 年 8 月号　掲載

数学Ⅲの中でも「逆関数」は，特に理論をしっかり理解しておかなければ扱うことができないものである．本稿では，定義からグラフ，微分まで解説していきたい．

まずは，定義や用語をしっかり確認しておこう．

> A，B を集合とし，関数 $f(x)$ の定義域が A，値域が B とする．つまり，
>
> $A=\{f(x)$ の x に代入できる実数$\}$，
>
> $B=\{f(a)\ (a\in A)\}$
>
> $=\{A$ の要素を $f(x)$ に代入して得られる実数$\}$
>
> である．
>
> 異なる A の要素 a_1，a_2 を $f(x)$ に代入したときに $f(a_1)\neq f(a_2)$ であるとする (1 対 1 の対応)．このとき，B のすべての要素 b に対して
>
> $f(a)=b$
>
> となる A の要素 a が存在し，しかも，ただ 1 つである．
>
> よって，定義域が B，値域が A の関数 $g(x)$ を
>
> $g(x)=(f(a)=x$ となるような $a)$
>
> で定義することができる．この $g(x)$ を $f(x)$ の逆関数という．
>
> このとき，$f(x)$ は $g(x)$ の逆関数になっている．

一般論ではややこしいので，具体例で見ていこう．

指数関数 $f(x)=e^x$ と対数関数 $g(x)=\log x$ は互いに逆関数の関係にある．

$f(x)$ … 定義域：$A=$(実数全体の集合)

　　　値域：$B=$(正の数全体の集合)

$g(x)$ … 定義域：$B=$(正の数全体の集合)

　　　値域：$A=$(実数全体の集合)

対数の定義が，

$g(b)=\log b$

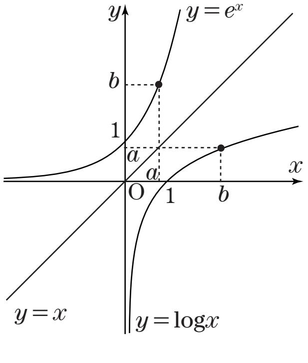
$=(e^a=b$ となる $a)$

であり，見方を変えると，

$f(a)=e^a$

$=(\log b=a$ となる $b)$

である．これは，



『$(a,\ b)$ が $y=e^x$ 上にある』と『$(b,\ a)$ が $y=\log x$ 上にある』が同値になっている，ということである．これを踏まえると，図のように 2 つのグラフは $y=x$ に関して対称であることが分かる．

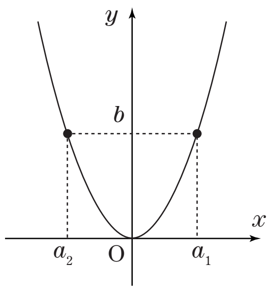
では，別の例を．

$f(x)=x^2$ は

　　定義域：$A=$(実数全体の集合)

　　値域：$B=(0$ 以上の実数全体の集合)

である．



図のように，異なる a_1，a_2 で ${a_1}^2={a_2}^2$ となることがあるので，$f(x)$ は 1 対 1 の対応を表しておらず，$f(x)$ の逆関数は存在しない．そこで，定義域を $x\geqq 0$ および $x\leqq 0$ に限定すると

$$f_1(x)=x^2\ \ (x\geqq 0)$$

$$f_2(x)=x^2\ \ (x\leqq 0)$$

には逆関数が存在する (順に $g_1(x)$，$g_2(x)$ とおく)．すると，$g_1(x)$ は定義域が $x\geqq 0$ で，値域が $y\geqq 0$ であり，$g_2(x)$ は定義域が $x\geqq 0$ で，値域が $y\leqq 0$ である．

実際に求めると，

$$y=g_1(x)\iff x=f_1(y)$$

$$\iff x=y^2\ (y\geqq 0)$$

$$\iff y=\sqrt{x}$$

$$\therefore\quad g_1(x)=\sqrt{x}$$

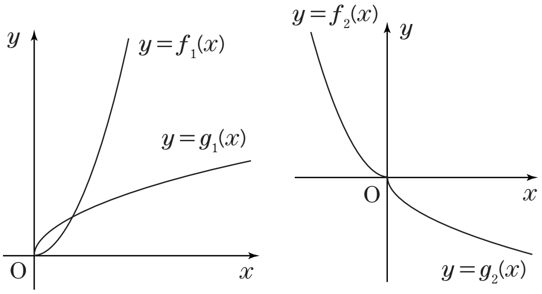
である．

よく知られているように，「1 対 1 の対応をしている関数 $y=f(x)$ に対して，$y=f(x)$ の逆関数は，x と y を入れ替えた $x=f(y)$ を変形して，y を x の式で表したもの」である．

同様にして，$f_2(x)$ の逆関数は

$$g_2(x)=-\sqrt{x}$$

であり，グラフは次の通りである．



例えば，反比例 $y=\dfrac{1}{x}$ の逆関数は $y=\dfrac{1}{x}$ そのものである．このような分数関数を考えてみよう．

> **問題** 1. 関数 $f(x)=\dfrac{ax+1}{x-2}$ について考える $(a>0)$.
>
> （1）$f(x)$ の定義域，値域を求めよ．
> （2）$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ．
> （3）$f^{-1}(x)=f(x)$ となる実数 a を求めよ．

解　（1）定義域は $\boldsymbol{x \fallingdotseq 2}$ である．

$$f(x)=\frac{a(x-2)+2a+1}{x-2}=\frac{2a+1}{x-2}+a$$

より，値域は $\boldsymbol{y \fallingdotseq a}$ である．

⇨注　$2a+1=0$ のとき，$f(x)=a$ (定数) である．本問では, $a>0$ としているので, $2a+1 \fallingdotseq 0$ である．よって，値域は $y \fallingdotseq a$ となる．

（2）　$y=f^{-1}(x) \iff x=f(y)$

である．

$$x=\frac{2a+1}{y-2}+a \quad \therefore \quad (x-a)(y-2)=2a+1$$

を y について解いて，

$$y-2=\frac{2a+1}{x-a} \quad \therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{2a+1}{x-a}+2}$$

となる．これが $f^{-1}(x)$ である．

（3）$f^{-1}(x)$ の定義域は $x \fallingdotseq a$ で，値域は $y \fallingdotseq 2$ である．

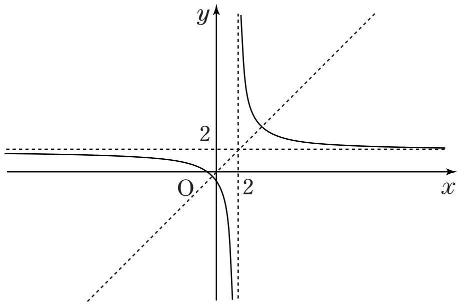
$f^{-1}(x)=f(x)$ としたら，両関数の定義域，値域がそれぞれ一致するので，　$a=2$ が必要である．このとき，

$$f(x)=f^{-1}(x)=\frac{5}{x-2}+2$$

となり，確かに関数として一致している．

よって，$\boldsymbol{a=2}$ である．

⇨注　$f(x)$，$f^{-1}(x)$ ともに反比例 $y=\dfrac{2a+1}{x}$ を平行移動したもので，合同である (反比例のグラフが $y=x$ に関して対称であることからも分かる)．よって，漸近線が一致すれば，同じ関数であることが分かる．解答から分かるように，(1 次式) ／ (1 次式) の分数関数 (☆) は，反比例のグラフを平行移動したものである．一般に逆関数は定義域と値域がちょうど入れ替わる．また，(☆) については，定義域と値域から漸近線が分かる．よって，(☆) は，定義域と値域が同じ範囲になるときに，逆関数と元の関数が一致する．今回の（3）では，定義域と値域が $x \fallingdotseq 2$ と $y \fallingdotseq 2$ になった．



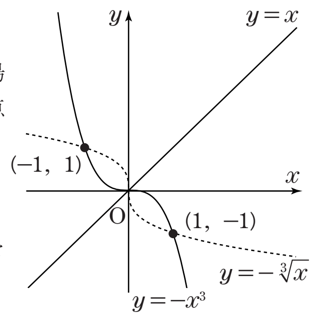
図を見て分かるように，この関数は連続 (定義域内の各点周辺でつながっている) であるが，連結 (グラフが 1 つのパーツからなる) ではなく，しかも，単調ではない (各パーツ内では単調減少だが，全体としては単調でない)．このような形でも 1 対 1 の対応であるから，逆関数は存在する．

*　　　　*

では，定義の確認はこれくらいにして，話を進めよう．

$y=f(x)$ と逆関数 $y=f^{-1}(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称であるから，2 つのグラフの交点について誤解を生じることがある．つまり，「$y=x$ 上にしか交点がないのではないか？」という勘違いである．

例えば，右のような場合，$y=x$ 上でない交点も存在する．これは，$y=-x^3$ のグラフが，$y=x$ について対称な 2 点 $(1,\ -1)$ と $(-1,\ 1)$ を通るからである．



また，**問題** 1 のように $f^{-1}(x)=f(x)$ となる場合は，グラフ上のすべての点が逆関数のグラフとの共有点である．$y=x$ に関する対称性は重要であるが，安易に考えて失敗しないように心がけたい．

*　　　　*

さらに話を進めよう．逆関数の微分公式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

についてである．これを正しく使いこなせているだろうか？例えば，$f(x)=e^x$ の微分 $f'(x)=e^x$ を利用して逆関数 $g(x)=\log x$ を微分できるだろうか？これについては，(*) を公式と思わずに，陰関数の微分と考えても良い．つまり，

$$y=g(x) \iff x=e^y \quad \cdots\cdots\cdots \quad (\#)$$

であるから，これの両辺を x で微分して，

$$1=e^y\cdot\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y}$$

となり，(#) を代入すれば

$$g'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

となる．これを形式的に公式化したものが (*) である．

同様に $f_1(x)=x^2$ $(x\geqq 0)$ の微分 $f_1'(x)=2x$ を利用して逆関数 $g_1(x)=\sqrt{x}$ を微分できるだろうか？

$$y=g_1(x) \iff x=y^2 \ (y\geqq 0)$$

において，両辺を x で微分して

$$1=2y\cdot\frac{dy}{dx} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

となる．ここで，$x=0$ のとき，分母が 0 になってしまい，$g_1(x)$ は微分不可能である．こうなるのは，$y=g_1(x)$ が原点において y 軸に接しているからである．

実は，逆関数の微分（に相当すること）は，気づかないうちに置換積分でよく使っているものである．実例で見てみよう．2006 年の東大 (前期) の問題である．

> **問題** 2. $x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ．
>
> （1）関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ．すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ．
>
> （2）前問（1）で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする．このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx$ を求めよ．

解　（1）微分すると

$$\begin{aligned}
&f'(x)\\
&=12\cdot\frac{(3e^{3x}-3e^x)(e^{2x}-1)-(e^{3x}-3e^x)(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}\\
&=12\cdot\frac{e^{5x}+3e^x}{(e^{2x}-1)^2}>0
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，$f(x)$ は単調増加である．また，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12\left(e^x-\dfrac{3}{e^x}\right)}{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$$

となるので，$f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことが示された．

（2）$g(x)$ を x の式で書くことは難しいので，

$$y=g(x) \iff x=f(y)$$

を用いて，$f(y)$ を積分する形に置換する．

$$dx=f'(y)dy$$

である．積分区間は少し厄介である．まず

$$8=f(y)=\frac{12(e^{3y}-3e^y)}{e^{2y}-1}$$

$$\therefore \quad 2(e^{2y}-1)=3(e^{3y}-3e^y)$$

を解く．（1）より，この方程式の解は 1 つと分かっているので，$e^y=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots$ として探してみる．すると，上式は $e^y=2$ $(y=\log 2)$ で成り立つ（他にない）．

同様に探すと，

$$27=f(y)=\frac{12(e^{3y}-3e^y)}{e^{2y}-1}$$

$$\therefore \quad 9(e^{2y}-1)=4(e^{3y}-3e^y)$$

は $e^y=3$ $(y=\log 3)$ で成り立ち，（1）より，他にはない．

よって，

$$\int_8^{27} g(x)\,dx=\int_{\log 2}^{\log 3} yf'(y)\,dy$$

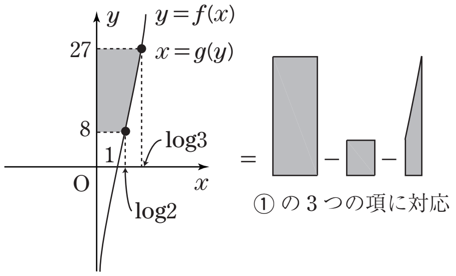
となる．部分積分で計算すると

$$\begin{aligned}
&\int_{\log 2}^{\log 3} yf'(y)\,dy\\
&=[yf(y)]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3} f(y)\,dy\\
&\left.\begin{aligned}&=(\log 3)\cdot 27-(\log 2)\cdot 8\\ &\quad -12\int_{\log 2}^{\log 3}\left(\frac{-2e^y}{e^{2y}-1}+e^y\right)dy\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\ ①\\
&\left(\because\ f(\log 3)=27,\ f(\log 2)=8\right.\\
&\left.\qquad f(y)=12\cdot\frac{(e^{2y}-1)e^y-2e^y}{e^{2y}-1}=12\left(\frac{-2e^y}{e^{2y}-1}+e^y\right)\right)\\
&=27\log 3-8\log 2\\
&\quad -12\int_{\log 2}^{\log 3}\left(\frac{e^y}{e^y+1}-\frac{e^y}{e^y-1}+e^y\right)dy\\
&=27\log 3-8\log 2\\
&\quad -12[\log(e^y+1)-\log(e^y-1)+e^y]_{\log 2}^{\log 3}\\
&=27\log 3-8\log 2\\
&\quad -12(\log 4-\log 2+3-\log 3+\log 1-2)\\
&=\mathbf{39\log 3-20\log 2-12}
\end{aligned}$$

となる．

*　　　　　　　　*

少し計算が大変になったが，実は，今回の部分積分は，図のようにして面積を考えているのと同じである．



①の 3 つの項に対応

では，最後に，2012 年の神戸大 (前期) の問題へ．

> **問題** 3. $x>0$ に対し関数 $f(x)$ を
>
> $$f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$
>
> と定め，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく．以下の問に答えよ．
>
> （1） $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ．
>
> （2） $\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ．
>
> （3） $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ．

解 （1） $\dfrac{d}{dx}f(x)=\boldsymbol{\dfrac{1}{1+x^2}}$．

（2） $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ より，

$$\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}=\boldsymbol{\frac{-1}{1+x^2}}$$

となる．

（3）（1）と（2）から，

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-1}{1+x^2}=0$$

となり，$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は定数である．

その定数の値を求めるために，$f(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ となる $x=1$ での値 $f(1)$ を考えよう．

$$f(1)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\ \ (t=\tan\theta)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

であるから，

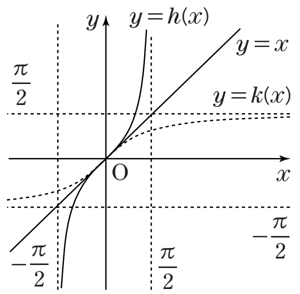
$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(1)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

である．

＊　　　　　＊

定積分の問題としての出題だが，裏から考えることができる．$t=\tan\theta$ と置換する典型的な積分であったが…

$h(x)=\tan x\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は単調増加関数であるから，逆関数 $k(x)$ が存在する．



$k(x)$ を微分してみよう．

$$y=k(x)\iff x=\tan y$$

より，

$$1=\frac{1}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$\therefore\quad k'(x)=\frac{dy}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

である．$k(0)=0$ であることに注意すると，積分して，

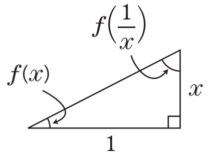
$$k(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$$

となる．これが **問題** 3 の $f(x)$ の正体である．つまり，

$f(x)=$ ($\tan$ が x になる角度)

$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ ($\tan$ が $\dfrac{1}{x}$ になる角度)

である．つまり，図のような角度であるから，



$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

となることは明白である．

ここまでくれば $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}$ は暗算でも分かる．$\tan$ が $\sqrt{3}$ になる角度であるから，もちろん $\dfrac{\pi}{3}$ である．

（よしだ　のぶお，予備校講師）