数学集中講義

極限の理論追求　～関数の極限について～

吉田　信夫

大学への数学　13 年 1 月号　掲載

極限の問題を単なる“求値問題”と思い込んでいないだろうか？数列でも関数でも，「～の極限値を求めよ.」と言われたら，「収束証明＋極限値」という 2 つのことをしなければならない，と意識しておく必要がある.

極限には，公式がいくつかある．それらは，“値を教えてくれる公式”ではなく，“収束することが分かり，しかも，値も求めることができる公式”である．公式の多くは，高校数学で厳密に証明することができないので，それらを使うときには，常に“形”を整えなければならない．独自のアレンジを加えて適用することは，致命傷になりかねないので，注意しておかなければならない．本稿では，そのことを実感できるような例をいくつか挙げていきたい.

では，公式 (定義) をいくつか確認しておこう.

<公式>

① $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$,

② $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$,

③ $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$,

④ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$,

⑤ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

ただし，適用条件があるものもある.

④ は「$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なとき」，⑤ は「$f(x)$ が $0\leqq x\leqq1$ で積分可能なとき」しか使えない．これらの誤用例は後ほど．また，⑤ が n 個の和でなく $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}$ などであっても，端の 1 個や 2 個は 0 に収束するため，極限値は変わらない．詳細は，次の例題（2）で.

まず，基本手法の確認から.

例題　次の各極限を求めよ.

（1）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2^x-1)\log(1-3x)}{x\sin2x}$

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n^3}}$

解　（1）　$2=e^{\log2}$ に注意して，公式の形に合わせて，

$$\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)\log(1-3x)}{x\sin2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{(\log2)x}-1}{(\log2)x}\cdot\frac{\log\{1+(-3x)\}}{-3x}\cdot\frac{2x}{\sin2x}\cdot\frac{-3\log2}{2}$$
$$=1\cdot1\cdot1\cdot\frac{-3\log2}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{-3\log2}{2}}$$

となる.

（2）　$k=0$ の項を加えても変わらないので，n 個の和に変えて区分求積の公式を使うと，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}}$$
$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

となる.

*　　　　　　　　*

ここまでは，形を公式に合わせるだけなので，基本的である．次は少し変わったパターン.

問題 1.　次の各極限を求めよ.

（1）　関数 $f(x)$ を以下で定める：

$f(x)=0$ (x が無理数のとき)

$f(x)=1$ (x が有理数のとき)

このとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ を求めよ.

（2）　関数 $g(x)$ を以下で定める：

$g(x)=|x^2-1|$

このとき，極限 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$ を求めよ.

解　（1）　$\dfrac{k}{n}$ はすべて有理数であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n$$
$$=\lim_{n\to\infty}1=\mathbf{1}$$

である.

（2）　$h\to+0$ のとき，$(1+h)^2>1$，$(1-h)^2<1$ より，

$$g(1+h)=(1+h)^2-1,\ g(1-h)=1-(1-h)^2$$

であるから，

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{\{(1+h)^2-1\}-\{1-(1-h)^2\}}{2h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{2h^2}{2h}=\lim_{h\to+0}h$$
$$=0$$

である．

$h\to-0$ のとき，$(1+h)^2<1$，$(1-h)^2>1$ より，

$$g(1+h)=1-(1+h)^2,\quad g(1-h)=(1-h)^2-1$$

であるから，

$$\lim_{h\to-0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{\{1-(1+h)^2\}-\{(1-h)^2-1\}}{2h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{-2h^2}{2h}=\lim_{h\to-0}(-h)$$
$$=0$$

である．

よって，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$ は存在し，

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}=\mathbf{0}$$

である．

⇨注１　（１）の関数は“ディリクレの関数”と呼ばれるものである．問題で登場したような有理数ばかりを分割点にとっていくと，与式は１に収束する．

しかし，この関数はすべての点で不連続で，もちろん，積分不可能である．つまり，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ は存在しない（高校範囲では）．

定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ が存在するときは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ に収束するが，それ以外のときは，積分とは無関係に極限を求めることになる．

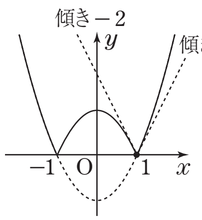
ちなみに，関数 $f(x)$ の定義を，

$f(x)=0$ （x が有理数のとき）

$f(x)=1$ （x が無理数のとき）

と逆転したものに変更すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=0$ である．

⇨注２　（２）の関数 $g(x)$ のグラフは右のようになり，$x=1$ で微分不可能である．つまり，



$$\lim_{h\to+0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\{(1+h)^2-1\}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to+0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to+0}(2+h)$$
$$=2,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\{1-(1+h)^2\}-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to-0}\frac{-2h-h^2}{h}=\lim_{h\to-0}(-2-h)$$
$$=-2$$

より，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ が存在しない（つまり $g'(1)$ が定義されない）．

一方，（２）の極限において，もし，$g(x)$ が微分可能であれば，

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(g'(1)+g'(1))$$
$$=g'(1)$$

である．これを意識し過ぎて，以下のような失敗を犯してはならない．

ダメ！

誤答　（２）　微分係数の定義から，

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}=\cdots=g'(1)$$

である．しかし，

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\cdots=2,$$
$$\lim_{h\to-0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\cdots=-2$$

より，$g'(1)$ は存在しない．

よって，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$ も存在しない．

$g(x)$ が $x=1$ で微分可能でないから，$g'(1)$ とは無関係に $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{2h}$ は存在しているのである．

極限において，存在を仮定して議論してはならない．

例えば，$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ が収束して初めて，$g'(1)$ と書くことが許されるので，「$x=1$ での微分可能であることを示せ」と言われたときに，

$$g'(1)=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\cdots\cdots\cdots$$

という書き出しは NG である．

次は，極限の深淵にせまる問題である．

問題 2. 次の各命題の真偽を答え，真なら証明し，偽なら反例を挙げよ．

（1） 数列 $\{a_n\}$ において，

$$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq\frac{1}{2}\ (n\geqq 1)\ \text{ならば}\ \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

（2） 関数 $f(x)$ において，

$$0<\frac{f(x+1)}{f(x)}\leqq\frac{1}{2}\ (x\geqq 0)\ \text{ならば}\ \lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

解 （1） **真**である．以下で示す．

仮定より，

$$0<|a_{n+1}|\leqq\frac{1}{2}|a_n|\ (n\geqq 1)$$

である．よって，

$$0<|a_n|\leqq|a_1|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立つ．

$$\lim_{n\to\infty}|a_1|\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

である．

（2） **偽**である．以下に反例を挙げる．

整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と表す．つまり，

$$\mathbb{Z}=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots\cdots\cdots\}$$

である．また，$[x]$ で x 以下の最大整数を表す．

このとき，関数 $f(x)$ を以下で定義する：

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{[x]}\tan\frac{(2x-1)\pi}{2}\quad(x\text{ が整数でないとき})$$

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\quad(x\text{ が整数のとき})$$

$x=n$ (n は整数) 周辺の様子は以下のようになる：

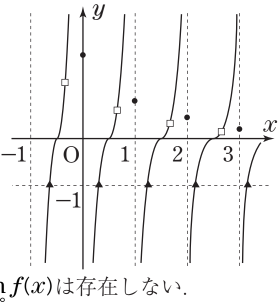
$$f(x)=\begin{cases}\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\tan\frac{(2x-1)\pi}{2} & (n-1<x<n) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n} & (x=n) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\tan\frac{(2x-1)\pi}{2} & (n<x<n+1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & (x=n+1) \\ \cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

また，グラフは図のようになる．

すると，$[x]$ の性質：$[x+1]=[x]+1$ より，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{[x+1]}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{[x]}$$

であり，さらに，



$\tan\frac{(2x-1)\pi}{2}$ の周期が 1 であるから，

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{1}{2}$$

である．

x がどれだけ大きいところでも，$f(x)$ は任意の実数値をとりうるので，$\lim_{x\to\infty}f(x)$は存在しない．

⇨ 注 $\lim_{x\to\infty}f(x)$は，図の□や● (x が整数であるときの $f(x)$ の値) ばかり見ていくと 0 に収束する．しかし，▲ばかり見ていくと -1 に収束し，漸近線の近くを見ていくと限りなく大きくもなる．$x\to\infty$の方法により，極限が様々な結果になる．“一定の挙動”にならないから，極限は存在しないのである．

＊　　　　＊

（1）と同様に（2）を考えた誤答を見てみよう．おかしいところがすぐに分かれば，極限の理解度はかなり高いと言えるだろう．

ダメ！

誤答 （2） 題意より，

$$0<|f(x+1)|\leqq\frac{1}{2}|f(x)|$$

が成り立つ．ゆえに，正の実数 t に対し，

$$\begin{aligned}|f(t)|&\leqq\frac{1}{2}|f(t-1)|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^2|f(t-2)| \\ &\leqq\cdots\cdots\cdots \\ &\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{[t]}|f(t-[t])|\quad\cdots\cdots\cdots\ (*)\end{aligned}$$

$$(0\leqq t-[t]<1)$$

が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{[t]}|f(t-[t])|=0$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$$

である．

どこに問題があるだろうか？気になるのは，

1） $|f(t-[t])|$ の値が分からないこと

2） 1 刻みの x だけを追っていること

であろうか．1 つずつ見ていこう：

1） 例えば，$f(x)$ が連続なら，$0\leqq x\leqq 1$ での最大値 M をとると，

$$|f(a)|\leqq M\ (0\leqq a\leqq 1)$$

$$\therefore\quad |f(t-[t])|\leqq M\ (0\leqq t-[t]<1)$$

であり，これを $(*)$ に代入して，

$$|f(t)|\leqq\left(\frac{1}{2}\right)^{[t]}M$$

である．$[t] \leqq t$ より，

$$|f(t)| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^t M$$

である．さらに，

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^t M = 0$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

である．

解の $f(x)$ では，最大値 M が存在していない．これが反例になる理由の１つである．

２）　$x \to \infty$ のとき，“x を大きくする方法によらず極限が一定”でなければ，極限は存在しない．つまり，極限が存在するには，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ なるすべての数列 $\{x_n\}$ に対して極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ が存在し，しかも，すべてが一致しなければならない．

誤答では，各 a $(0 \leqq a < 1)$ に対して，数列

$$x_n = a + (n-1)$$

で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ となることを確認したに過ぎない．

＊　　　　　＊

ここでの議論と同様のものが，“点列連続性”である：

> 関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続とする．数列 $\{x_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たすならば，以下が成り立つ：
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

次は有名な応用例であろう：

> **問題** 3.　次の問いに答えよ．
>
> （１）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ を求めよ．
>
> （２）　$f(x)$ を
>
> $$f(x) = x^2\cos\frac{1}{x}\quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$
> $$f(0) = 0$$
>
> で定める．$f(x)$ はすべての x で微分可能であることを示せ．さらに，導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で不連続であることを示せ．

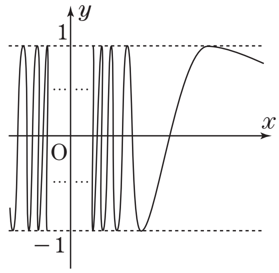
解　（１）　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n = \frac{1}{n\pi},\ b_n = \frac{2}{(4n-3)\pi}$$

で定めると，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

であるが，



$$\sin\frac{1}{a_n} = 0,$$
$$\sin\frac{1}{b_n} = 1$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{a_n} = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{b_n} = 1$$

となる．よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しない．

（２）　$x \neq 0$ のとき，微分可能であり，

$$f'(x) = 2x\cdot\cos\frac{1}{x} + x^2\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$
$$= 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$$

となる．

$x = 0$ においても，

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h^2\cos\frac{1}{h} - 0}{h} = h\cos\frac{1}{h}$$

において，

$$\left|h\cos\frac{1}{h}\right| \leqq |h|,\ \lim_{h\to 0}|h| = 0$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$$

となるから，$f'(0)$ が存在し，$f'(0) = 0$ である．

よって，$f(x)$ は微分可能である．

次に，連続性について考える．$f'(x)$ において，

$$\lim_{x\to 0} 2x\cos\frac{1}{x} = 0$$

であり，（１）より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しないので，

$$\lim_{x\to 0} f'(x)$$

は存在しない．

よって，$f'(x)$ は $x = 0$ で不連続である．

＊　　　　　＊

念のために定義を確認しておこう．

$$f'(x) \text{ が } x = 0 \text{ で連続}\quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$$

“極限が存在し，かつ，$f'(0)$ と一致する”である．特に，左右の極限が存在するときは，

$$\lim_{x\to +0} f'(x) = \lim_{x\to -0} f'(x) = f'(0)$$

と書き換えることができる．

（２）は，“左右の極限すら存在しない”から，当然，不連続である．

（よしだ　のぶお，予備校講師）