強者の戦略

物理講師の内多です。そういえば約1年前，第27回の問題原稿中に，「金環日食（2012年5月21日朝）の観測を非常に楽しみにしている」というコメントを掲載しました。みなさんは観測できましたか？きれいでしたよね，金環日食。しかしながら，私はというと，なんと，ちょうど金環日食の時間帯だけ太陽が雲に覆われてしまうという不運に見舞われ，残念ながら観測できませんでした・・・。当日は金環日食の中心帯が通る近畿南部ほど曇る確率が高いということで観測小旅行は取りやめ，大阪市内の自宅に待機していたのにこの有様です。ちなみに，先輩・友人の情報を総合すると，どうやら大阪市内で曇ったのは私の住んでいる地域だけだったようで，なんとも無念。まあ自然相手だからそんなこともあるさ，と自分で自分を慰めるものの，先輩・友人から次々寄せられる「こちらは観測できました！そちらはどう？」という携帯メールが心に刺さる初夏の早朝でした。

さて，本題です。問題は2012年の京都大学の過去問としました。問題のテーマは「相対性理論」。そう，かの大物理学者アインシュタインが完成させた，(おそらく) 世の中で最も有名な物理の理論です。もちろん，高校では相対性理論なんて習いませんし，大学で本格的に学んだとしても完全に理解できる人がどれくらいいるかわからない，なかなか難解な理論です。ですから，この問題では，相対性理論で説明される「時計の進み方の違い」のみを取り上げ，それを高校生にも解けるように非常に丁寧な誘導をつけて実際に導いていく，という構成になっています。なお，この問題に挑戦する人は，あまりの問題文の長さに面食らうかも知れませんが，これは「非常に丁寧な誘導」をつけた結果であって，むしろ京大の教授陣のやさしさであると受け止めるべきでしょう。実際の試験ではこれを30分程度で解かねばなりませんからそんなやさしさに触れる余裕もないかも知れませんが，このページをご覧になっているみなさんはぜひ，時間をかけて構いませんからじっくりと問題を味わいながら解いていってもらえれば，と思います。

【問題】

次の文章を読んで，$\boxed{}$には適した式を，$\boxed{\boxed{}}$には適切な語句をそれぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{}$（点線）にはすでに$\boxed{}$で与えられたものと同じ式を表す。また，問1～問3については，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。1に近い量は，微小量$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_k$に対して成り立つ近似式

$$\frac{1}{1-\varepsilon}=1+\varepsilon \quad \text{および} \quad (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\varepsilon_k)=1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_k$$

を用いて，1＋（微小量）の形に表せ。以下では「重力」という言葉は「万有引力」と同じ意味である。また，地球の自転は無視する。

地球の密度は球対称であるとする。検出器Bは箱に固定されている。

(1)

図1のように，宇宙空間で図の上方に向かって，一定の加速度aで引っ張られている箱を考える。箱に固定された点Aにある振動数f_{A}の光源から，上方に距離hだけ離れた点Bにある検出器に向けて光の信号を送る。ここでは，上下方向の運動のみを考え，ベクトルである量は上を正の向きとする。

光が光源を出たときの箱の速度をv_{A}，検出器に到達したときの箱の速度をv_{B}とすると，検出器が受け取る光の振動数f_{B}とf_{A}の比は，ドップラー効果の式より，

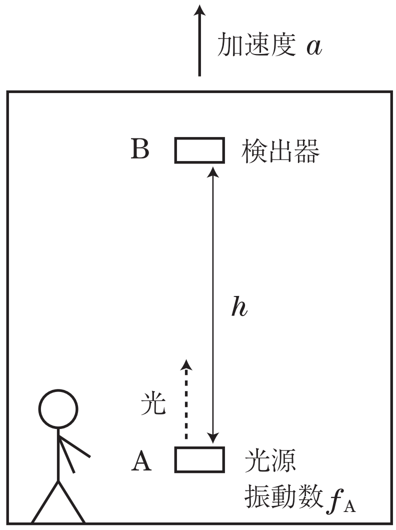

図 1

$$\frac{f_B}{f_A} = 1 + \frac{\boxed{\text{あ}}}{c}$$

となる（v_A, v_B を用いて表せ)。ここで，v_A, v_B の大きさは光速（光の速さ）c に比べて十分小さいとし，$\dfrac{v_A}{c}$，$\dfrac{v_B}{c}$ を微小量として上記の近似式を用いた。(ここでは，物体の速さは光速に比べて非常に小さいため，時間の遅れや物差しの縮みといった，いわゆる特殊相対論的な効果は無視してよい。)

光が光源を出てから検出器に到達するまでの時間を t とすると，$v_B - v_A$ は a と t を用いて $\boxed{\text{い}}$ と書ける。もし, 箱の速度が常にゼロであれば, t は c と h を用いて $\boxed{\text{う}}$ と書ける。箱が加速を受けている場合も，光が伝わる間, 箱の速度が常に光速に比べて十分小さいとき，すなわち，$\left|\dfrac{ah}{c}\right| << c$ がみたされている場合は，$t = \boxed{\text{う}}$ としてよい。以上のことから，$\dfrac{f_B}{f_A} = 1 - \dfrac{ah}{c^2}$ となることがわかる。光の振動数を考える代わりに，光源から短い時間間隔 Δt_A をおいて出た2つのパルスが, 検出器に到達するときにはどれだけの時間間隔（Δt_B とする。）になっているかを考えることもできる。振動数 f の光を，単位時間に f 個のパルスが出るという状況に置き換えてみると明らかなように，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 +$ （ $\boxed{\text{え}}$ ）と書けることがわかる（h, a, c を用いて表せ)。

(2)

ところで，図 1 のような等加速度運動をしている箱の中にいる観測者から見ると，物体には通常の力の他に観測者の加速度運動からくる $\boxed{\text{お}}$ 力が働き，見かけの重力加速度 $\boxed{\text{か}}$ が生じる（図の上向きを正として答えよ。)。このようにして生じる見かけの重力と本物の重力が何ら変わりないというのが, アインシュタインの等価原理である。

たとえば，地球の中心からの距離が r である点における地球による重力加速度は，地球の外では，向き

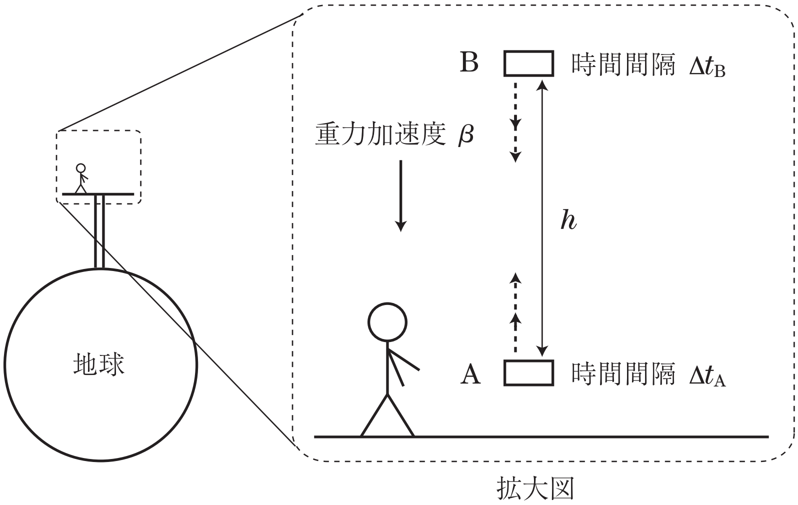

図 2

は $\boxed{\text{き}}$ であり，大きさは $\boxed{\text{く}}$ である（r，地球の質量 M および重力定数 G を用いて表せ)。これは，場所によって向きも大きさも異なるが，任意の点のまわりで十分小さい領域を考えると，その中では重力加速度は一定とみなしてよい。その領域内での物理現象は，上のような等加速度運動をしている観測者が見るものと全く同じである。

そうすると，図 2 の点線内のように，重力加速度が下向きで大きさ β が一定とみなせる領域内で，高さが h だけ異なる 2 つの地点 A と B の間で光をやり取りするとき，A における時間間隔 Δt_A と B における時間間隔 Δt_B の間には $\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + \left(\boxed{\text{け}} \right)$ の関係があることがわかる（β，h，c を用いて表せ)。

問 1

ここまでは A から B へ光を送ることを考えたが，逆に B から A へ光を送る場合も $\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$ は上の近似の範囲で同じ値となる。その理由を簡潔に述べよ。

この結果は，重力がある場合は，場所によって時間の進み具合が違っていることを示している。すなわち，A において時間が Δt_A 経過する間に，B では Δt_B だけ時間が経過するのである。これを，「A における時間 Δt_A と B における時間 Δt_B が対応している」ということにしよう。今の場合は，$\Delta t_B > \Delta t_A$ なので，時間の流れは B におけるほうが，A におけるより速い。

(3)

上の結果を，2 つの地点における重力ポテンシャルを使って表そう。質量 m の粒子が他の物体から重力を受けているとき，その位置エネルギーは m に比例するので $m\phi$ と表せる。ϕ を粒子が置かれている点における重力ポテンシャルとよぶ。

図 2 の場合は，A，B における重力ポテンシャルをそれぞれ ϕ_A，ϕ_B とすると，β，h を用いて，$\phi_B - \phi_A = \boxed{\text{こ}}$ と書ける。結局，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$ は ϕ_A，ϕ_B，c を用いて，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 + \left(\boxed{\text{さ}} \right)$ と表される。実

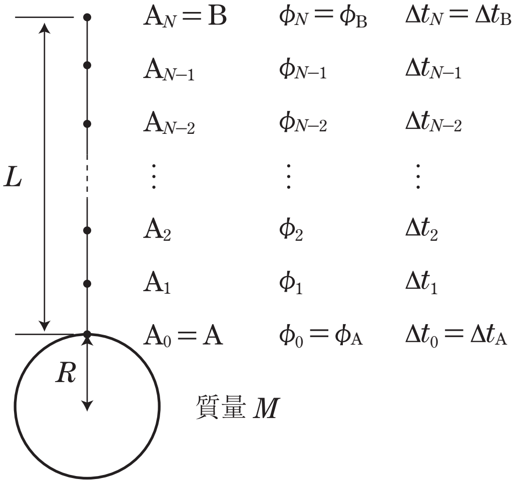

図　3

はこの式は，$\dfrac{|\phi_A - \phi_B|}{c^2}$ が 1 に比べて十分小さければ，重力加速度が空間的に一定でなくても成り立つ。

それを見るための具体例として，図 3 のように地表上の点 A と，その L だけ上空の点 B を考える。地球の半径を R とし，線分 AB を N 等分する点を A_1，…，A_{N-1} とする（便宜上，$A_0 = A$，$A_N = B$ とする。）。各点 A_i における重力ポテンシャルを ϕ_i とする。N が十分大きければ，各区間 A_iA_{i+1} では重力加速度は一定としてよいから，A_i における時間 Δt_i と A_{i+1} における時間 Δt_{i+1} が対応しているとすると，

$\dfrac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i} = 1 + \dfrac{\phi_{i+1} - \phi_i}{c^2}$ をみたす。

問 2

これらの N 個の式の辺々をかけ合わせ，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 +$（$\boxed{\text{さ}}$）が成り立つことを示せ。

次に，$\boxed{\text{さ}}$ を地表における重力加速度の大きさ g と R，L，c で表すことを考える。地球の外側にあり地球の中心から距離 r だけ離れた点に，質量 m の粒子を置いたときの重力の位置エネルギーは，無限遠を基準に取ると，m，r，M，G を用いて $\boxed{\text{し}}$ で与えられる。よって，その点における重力ポテンシャルは，$-\dfrac{GM}{r}$ である。一方，地表における重力加速度の大きさ g は $\dfrac{GM}{R^2}$ と書けるから，ϕ_A，ϕ_B は g，R，L を用いて，$\phi_A = \boxed{\text{す}}$，$\phi_B = -g\dfrac{R^2}{R+L}$ と表せる。これらを $\boxed{\text{さ}}$ に代入すると，結局，$\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A} = 1 +$（$\boxed{\text{せ}}$）であることがわかる（$g$，$R$，$L$，$c$ を用いて表せ）。

(4)

この結果は，人工衛星の中の時計と地表の時計の進み方の違いを与えるために重要であり，GPS（全地球測位システム）等で実際に使われている。図 4 のように，地球の重力により，高度 L の円軌道上を一定の速さ v で動いている人工衛星 C を考える。図 3 と同様に，A，B は地表の点およびその L だけ上空の点である。今の場合，C は B に対してかなりの速さで動いているため，時計の遅れといわれる特殊相対論的な効果も考

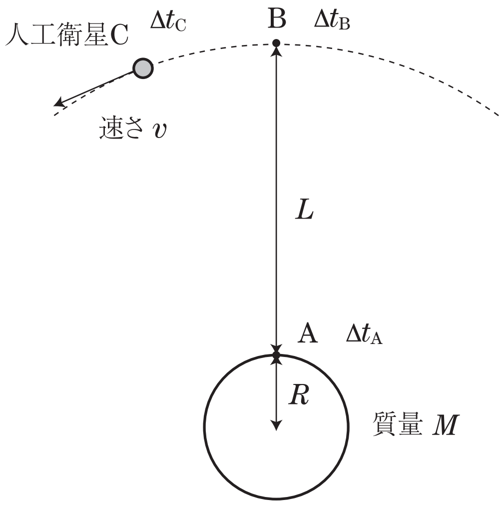

図　4

慮する必要がある。

特殊相対論によると，B における時間 Δt_B と C における時間 Δt_C の間には，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B} = 1 - \dfrac{v^2}{2c^2}$ という近似式が成り立つ。B における重力加速度の大きさは $g\left(\dfrac{R}{R+L}\right)^2$ と書けるから，v^2 も g，R，L を用いて表せることに注意すると，これは，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B} = 1 +$ （ $\boxed{\text{そ}}$ ）と書ける（g，R，L，c を用いて表せ)。

問 3

人工衛星の中の時計と地表の時計の進み方の比は $\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$ である。以上のことから，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$ を g，R，L，c を用いて表せ。また，$g = 9.8\ \text{m/s}^2$，$R = 6.0 \times 10^6\ \text{m}$，$L = 3.0 \times 10^7\ \text{m}$，$c = 3.0 \times 10^8\ \text{m/s}$ としたときの $\dfrac{\Delta t_B}{\Delta t_A}$，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_B}$，$\dfrac{\Delta t_C}{\Delta t_A}$ を 1＋(微小な数値) の形で求めよ。