強者の戦略

第35回の解答編です。「相対性理論」って要は何なの？と気になる人も多いかと思いますが，まずはそんなことは一切気にせず，誘導に沿って淡々と解いていってみます。実は京大の入試問題の中には，このようなある種の「割り切り」が重要となるものが存在します。いくら考えたところで，習ったことのない相対性理論なんぞ「理解」することなど不可能です。限りある試験時間内ではなおのことです。ですから，意味のわからない文章があったとしても，その部分は文章通りに受け止めておいて，それを信じて（言い換えれば与えられた理論・公式を用いて）解いていく，という姿勢が重要なのです。本問題で言えば，「等価原理」に関する説明のくだりにある

「これは，場所によって向きも大きさも異なるが，任意の点のまわりで十分小さい領域を考えると，その中では重力加速度は一定とみなしてよい。その領域内での物理現象は，上のような等加速度運動をしている観測者が見るものと全く同じである。」（本文抜粋）

という部分が代表例となりましょうか。

では，解答解説です。

あ

光源（波源）と検出器（ここでのみ観測者とよぶ）を載せた箱全体が加速しているから，波源の速度は光が出た瞬間の速度 v_{A}，観測者の速度は光が到達した瞬間の速度 v_{B} で，光の速度が有限であるが故に $v_{\mathrm{A}} \neq v_{\mathrm{B}}$。

ドップラー効果の式より，

$$f_{\mathrm{B}} = \frac{c - v_{\mathrm{B}}}{c - v_{\mathrm{A}}} f_{\mathrm{A}}$$

$$\therefore \quad \frac{f_{\mathrm{B}}}{f_{\mathrm{A}}} = \frac{c - v_{\mathrm{B}}}{c - v_{\mathrm{A}}} = \frac{1 - \dfrac{v_{\mathrm{B}}}{c}}{1 - \dfrac{v_{\mathrm{A}}}{c}}$$

$$= \left(1 - \frac{v_{\mathrm{B}}}{c}\right)\left(1 - \frac{v_{\mathrm{A}}}{c}\right)^{-1}$$

$$\fallingdotseq \left(1 - \frac{v_{\mathrm{B}}}{c}\right)\left(1 + \frac{v_{\mathrm{A}}}{c}\right)$$

$$\fallingdotseq 1 + \frac{v_{\mathrm{A}}}{c} - \frac{v_{\mathrm{B}}}{c}$$

$$= 1 + \frac{v_{\mathrm{A}} - v_{\mathrm{B}}}{c}$$

い

問われているのは時間 t の間の箱の速度変化。等加速度運動の式より，

$$v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{A}} + at \qquad \therefore \quad v_{\mathrm{B}} - v_{\mathrm{A}} = at$$

う

光は距離 h を速さ c で伝わって検出器に達する。等速直線運動の式より，

$$t = \frac{h}{c}$$

え

振動数と周期の関係より，$f_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{\Delta t_{\mathrm{A}}}, f_{\mathrm{B}} = \dfrac{1}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$ である。あ～うの結果より，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{1 - \dfrac{ah}{c^2}} \fallingdotseq 1 + \frac{ah}{c^2}$$

お，**か**

箱の中にいる，加速度を持つ観測者から見える見かけの力は「慣性力」である。その大きさは ma で，向きは観測者の加速度と逆向きである。よって，見かけの重力加速度を g' として，箱の中の観測者から見た質量 m の物体の運動方程式を考えて，

$$-ma = mg' \qquad \therefore \quad g' = -a$$

（ここまでは確実に解きたいところ。ここからがポイント）

き，**く**

地球が球対称で密度一様なので，地球による重力加速度の向きは地球の中心に向かう向きであり，その大きさ β は質量 m の物体の運動方程式を考えて，

$$m\beta=\left|-G\frac{Mm}{r^2}\right| \qquad \therefore \quad \beta=\frac{GM}{r^2}$$

$\boxed{\text{け}}$

問題文の誘導にある通り，

「下向きに重力加速度 β のある領域内での光の振る舞いは，上向きに加速度 $a=\beta$ で運動する箱の中の光の振る舞いと同じ（等価）である」

とみなす。

よって，本問は $\boxed{\text{え}}$ の結果の a を β に置き換えるのみでよい。

$$\therefore \quad \frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+\frac{\beta h}{c^2}$$

問 1

B から A に光の信号を送るときには，$\boxed{\text{え}}$ の結果の加速度 β の符号が逆になると考えてよい。点 B に光源，点 A に検出器と位置が入れ替わるので，$\boxed{\text{え}}$ の結果の Δt_{A} と Δt_{B} を入れ替えかつ上記のように $\beta \to -\beta$ として $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ を近似計算すると，結果は $\boxed{\text{え}}$ と同じとなる。計算で示すと以下の通り。

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{A}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}=1+\frac{-\beta h}{c^2}$$

$$\to \quad \frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{1}{1-\dfrac{\beta h}{c^2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}\fallingdotseq 1+\frac{\beta h}{c^2}$$

$\boxed{\text{こ}}$

重力加速度 β が一定であるとみなせる領域の 2 点間において，重力による位置エネルギーの差は高さの差を h として $m\beta h$ と表される。重力ポテンシャルの定義より，

$$m(\phi_{\mathrm{B}}-\phi_{\mathrm{A}})=m\beta h \qquad \therefore \quad \phi_{\mathrm{B}}-\phi_{\mathrm{A}}=\beta h$$

$\boxed{\text{さ}}$

$\boxed{\text{こ}}$ の結果を $\boxed{\text{え}}$ の結果に代入して，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+\frac{\phi_{\mathrm{B}}-\phi_{\mathrm{A}}}{c^2}$$

問 2

与えられた $\dfrac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i}=1+\dfrac{\phi_{i+1}-\phi_i}{c^2}$ （$i=0$，1，2，…，$N-1$）の N 個の式を辺々かけ合わせて近似を用いることにより，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{\Delta t_N}{\Delta t_0}=\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0}\times\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\times\cdots\times\frac{\Delta t_N}{\Delta t_{N-1}}$$

$$=\left(1+\frac{\phi_1-\phi_0}{c^2}\right)\left(1+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\phi_N-\phi_{N-1}}{c^2}\right)$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{\phi_1-\phi_0}{c^2}+\frac{\phi_2-\phi_1}{c^2}+\cdots+\frac{\phi_N-\phi_{N-1}}{c^2}$$

$$=1+\frac{\phi_N-\phi_0}{c^2}$$

$$=1+\frac{\phi_{\mathrm{B}}-\phi_{\mathrm{A}}}{c^2}$$

$\boxed{\text{し}}$

万有引力による位置エネルギーの定義式より，その値を U として，

$$U=-\frac{GMm}{r}$$

（なお，点 A は地表面にあるので，その位置エネルギーは $U_{\mathrm{A}}=-\dfrac{GMm}{R}$ である。）

$\boxed{\text{す}}$

$g=\dfrac{GM}{R^2}\to GM=gR^2$ を用いて，

$$\phi_{\mathrm{A}}=\frac{U_{\mathrm{A}}}{m}=-\frac{GM}{R}=-gR$$

$\boxed{\text{せ}}$

ϕ_{A}，ϕ_{B} の値を $\boxed{\text{さ}}$ の結果に代入して，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+\frac{\left(-g\dfrac{R^2}{R+L}\right)-(-gR)}{c^2}$$

$$=1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}$$

$\boxed{\text{そ}}$

人工衛星 C の質量を m_{C} として，円運動の中心方向の運動方程式より，

$$m_{\mathrm{C}}\times g\left(\frac{R}{R+L}\right)^2=m_{\mathrm{C}}\frac{v^2}{R+L}$$

$$\therefore\quad v^2=\frac{gR^2}{R+L}$$

これを与えられた式に代入して，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}=1-\frac{v^2}{2c^2}=1-\frac{\dfrac{gR^2}{R+L}}{2c^2}$$

$$=1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}$$

問 3

$\boxed{\text{せ}}$，$\boxed{\text{そ}}$より，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}\times\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$$

$$=\left\{1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}\right\}\left\{1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}\right\}$$

$$\fallingdotseq 1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}$$

$$=1+\frac{gR(2L-R)}{2c^2(R+L)}$$

$\boxed{\text{せ}}$より，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=1+\frac{gRL}{c^2(R+L)}$$

$$=1+\frac{9.8\times(6.0\times10^6)\times(3.0\times10^7)}{(3.0\times10^8)^2(6.0\times10^6+3.0\times10^7)}$$

$$=1+5.44\cdots\times10^{-10}$$

$$\fallingdotseq 1+5.4\times10^{-10}$$

$\boxed{\text{そ}}$より，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}=1-\frac{gR^2}{2c^2(R+L)}$$

$$=1-\frac{9.8\times(6.0\times10^6)^2}{2\times(3.0\times10^8)^2(6.0\times10^6+3.0\times10^7)}$$

$$=1-5.44\cdots\times10^{-11}$$

$$\fallingdotseq 1-5.4\times10^{-11}$$

以上より，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}=\frac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}\times\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$$

$$=(1+5.44\times10^{-10})(1-5.44\times10^{-11})$$

$$\fallingdotseq 1+5.44\times10^{-10}-5.44\times10^{-11}$$

$$\fallingdotseq 1+4.9\times10^{-10}$$

いかがでしたか。

さて，答えを見てもわかったようなわからなかったような気になっている人もいるかと思います。そこで，せっかくですから，本問のテーマである「相対性理論」について，簡単な解説をしてみます。解説といっても，がっちりした理論を解説することは大学受験の範囲を超えていますから，それは割愛します。本問を解く上で役立ちそうな部分について，お話程度にとどめておきましょう。

《一般相対性理論と時計の進み方の違い》

「相対性理論」には，「特殊相対性理論」と「一般相対性理論」の 2 つが存在します。本問は$\boxed{\text{あ}}$～$\boxed{\text{せ}}$，すなわちほとんどの設問が「一般相対性理論」の説明となっています。その一般相対性理論の根本原理の一つといえるのが，問題文にもある「等価原理」です。

【等価原理】

重力と慣性力は本来見分けがつかないものである。

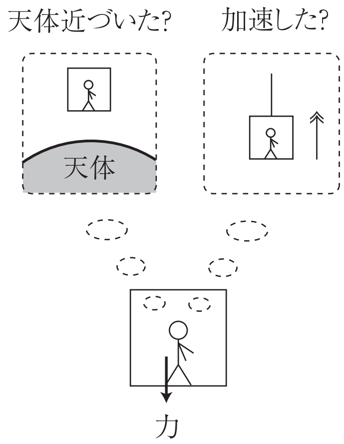
例えば，あなたが密閉されたエレベータ内に乗せられて，あらゆる天体からの万有引力が無視できるような宇宙空間の一点に連れていかれるという事件が起きたとしましょう。そのとき，あなたは力を受けませんからフワフワ浮いています。そして，ある時刻からエレベータの下方向（無重力では上も下もありませんが，力を感じたならばその方向を下方向としておきます）に力を感じ始めたとします。これ以降は，エレベータの床の上に立つことができるでしょう。このとき，あなたはこの現象をどのように解釈しますか？

「きっと，大きな天体が下から徐々に近づいてきているんだ」

という解釈をする人もいるでしょう。確かに，天体が近づいてくると徐々に万有引力を感じはじめますからね。これは間違っていない解釈です。

しかし，

「きっと，エレベータが上方向に加速しだしたのだ」



密閉されたエレベータ内の
人には,どちらが起きたのか
は区別できない。

という解釈をする人もいるでしょう。確かに，上向きに加速をはじめると，下向きに慣性力を感じますからね。これも間違っていない解釈です。

となると，どちらが正解かどうかは，実際に密閉されたエレベータの外の様子を見るより他はありません。いや，外の様子を見れば必ず判断できる，というわけでもないでしょう。近づいてきた天体が光を発しない天体だったら，天体の存在に気づけませんよね。また，エレベータの周りを見てもやはり何もない空間だったとしたら，自分自身がそもそも運動しているのかどうか判断できません。

こうなると，重力と慣性力の違いというものが，非常に判断しにくいものである，ということが分かってきます。アインシュタインは，正にこの事実をつきつめて，なんと「重力と慣性力は本来は同じものであって区別できない。同一視すべきものである」ということを原理（principle）としてしまったのです。すばらしい発想，思考の飛躍（グラン･ジュテ）ですね。

さて，等価原理を出発点とした一般相対性理論は，様々な物理現象に正確な説明を与えています。その一つが，本問のテーマである「時計の進み方の違い」です。なんと，重力場においては，高い位置にある時計の方が，低い位置にある時計よりも速く進むのです。不思議な気がしますが，実際にこのような現象が観測されており，かつ理論がその現象に対して正確な説明を与えているため，一般相対性理論はほぼ確かである理論として世の中に広く認められているのです。

背景知識はこれくらいにして，では，これをもとにして，京大の問題の流れを確認してみることにしましょう。私なりに問題の流れを3段階にまとめてみますと，次のようになります。

〈Step.1〉
加速するエレベータ内での光波のドップラー効果の実験から，加速度の向きに取った直線上の2点で光波の周期（時間）が異なることを受験生に（問題を解かせながら）「理解させる」。
〈Step.2〉
等価原理を受験生に「与える」。これにより，重力がはたらく系では加速度を持つ系と同じStep.1の現象が発生するが，重力がはたらく系は実際には加速度運動していない以上，我々はドップラー効果としては認識しないはず。では我々はどう認識するかというと，それが「時計の進み方の違い」として認識するんだよ，ということを受験生に「伝える」。
〈Step.3〉
与えた（伝えた）知識・理論と高校内容の万有引力の知識･理論を用いて，「時計の進み方の違いの比」をひたすら受験生に「計算させる」。

さあ，これらを頭に入れてもう一度問題を見直して見ると，どうでしょう。初見ではよくわからなかった人でも，導出の流れや背景知識を持っていれば，かなり解きやすくなったのではないでしょうか。

さて，このような背景知識を持つために，なるべく高校範囲外の物理を勉強した方がいいの？と思ってしまう人がいるかも知れません。答えはもちろんNo，受験生にそんな時間の余裕はありませんよね。初めにも記載した通り，この部分は「理解するもの」ではなく，「与えられたもの」であるので，悩んだり理解しようとする部分ではありません。そのために，京大の問題では，非常に丁寧な誘導が文章として与えられるわけです。本問では，上記Step.2がそれに当たります。この部分を，

「文章通りに受け止めておいて，それを信じて（言い換えれば与えられた理論・公式を用いて）解いていく」

ことができればよいと思います。世間では，これが

できる人が「文章読解力がある人」と呼ばれるのでしょう。もちろん，これには相応のトレーニングが必要です。京大の入試を考えている人は，できる限り早めに高校物理の学習を終え，京大の過去問に挑戦することをおすすめします。

　さて，本問はもう一つやっかいなところがありまして，それが最後の $\boxed{\text{そ}}$ の問題です。なんと，これだけが「一般相対性理論」ではなく，「特殊相対性理論」となっています。これも先述の Step.2 と同様，理論の結果がひょいっと与えられています（$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}=1-\dfrac{v^2}{2c^2}$ という部分です）から，それを信じて解いていくだけですが，最後に，これも簡単に解説をしてみましょう。特殊相対性理論からも（一般相対性理論とは違った論拠からくる）時計の進み方の違いが発生するのですが，これについては高校生でも定量的に説明できる部分がありますから，計算も交えて導いてみましょう。

《特殊相対性理論と時計の進み方の違い》

　まずは，一般相対性理論との違いから。一般相対性論は，「加速度系（非慣性系）＝慣性力（重力）がはたらく系」についての理論でしたが，特殊相対性理論は「加速度を持たない系（慣性系）＝慣性力（重力）がはたらかない系」についての理論です。ですから，以下の議論に加速度や重力の話はまったく出てきません。その代わりに，「等速直線運動する観測者」が登場し，これが特殊相対性理論で重要な役割を演じます。

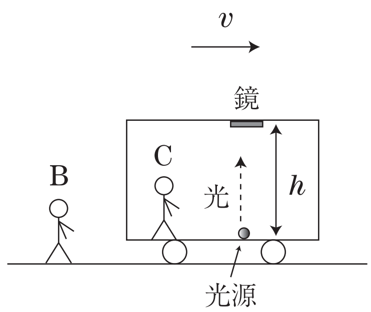
　では，この理論はどんな根本理論からスタートするのでしょうか。重要な原理の一つを紹介しましょう。

【光速度不変の原理】

　あらゆる慣性系から見て，真空中の光速度は一定である。

これは，「例えば光速度 c で伝播する光を，光と同じ速さ c で追いかける観測者が観測したとき，光速度はやはり c に見えますよ（0 には見えませんよ）」，ということを言っています。要は，我々が知っている相対速度のルールは，光速度に近い運動になると通用しないのです。不思議な気がしますが，これまた様々な観測事実と合致しています。そして，特殊相対性理論から導かれる時計の進み方の違いは，この原理を用いるのが便利です。

　では，例を挙げながら見てみましょう。結論から言えば，特殊相対性理論から導かれる時計の進み方の違いは，「運動する系の時計は，静止している系の時計より遅く（ゆっくりと）進む」というものだと言うとわかりやすいです。ですので，以下のような例を考えましょう。

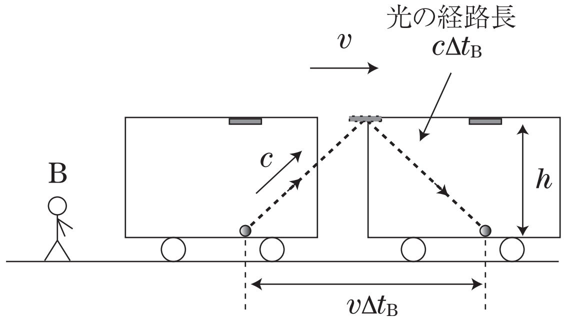


光の往復時間を，
地面に静止しているBと，
電車とともに動くCが観測

　いま，床に光源，天井に鏡が配置された電車を用意します。電車は一定の速さ v で右向きに運動しています。光源から出た光が鏡で反射され，再び光源に戻ってくるまでの往復時間を，立場の異なる 2 人の観測者の場合について計算してみましょう。

　1．地面に静止している観測者 B
　2．電車とともに運動する観測者 C

1．地面に静止している観測者 B



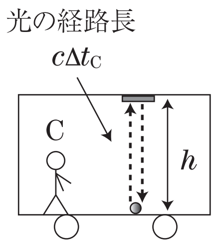
　往復時間を Δt_{B} とする。B から見ると，光が往復する間に電車も移動するので，再び光源に戻ってくるまでの光の経路は上図の通りである。ここで，光

速度不変の原理より，光速度は常に c であるから，光の経路長は $c\Delta t_{\mathrm{B}}$ である。その経路の半分にあたる部分について，三平方の定理より，

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t_{\mathrm{B}}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t_{\mathrm{B}}\right)^2$$

$$\therefore\ \Delta t_{\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{2h}{c} \quad \to \quad ①$$

<u>２．電車とともに運動する観測者C</u>



往復時間を Δt_{C} とする。C から見ると，再び光源に戻ってくるまでの光の経路は上図の通りである。ここで，光速度不変の原理より，光速度は常に c であるから，光の経路長は $c\Delta t_{\mathrm{C}}$ である。よって，

$$c\Delta t_{\mathrm{C}} = 2h \qquad \therefore\ \Delta t_{\mathrm{C}} = \frac{2h}{c} \quad \to \quad ②$$

①÷②より，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}} = \frac{\dfrac{2h}{c}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\dfrac{2h}{c}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで，$\dfrac{v^2}{c^2} \ll 1$ として，

$$\frac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}} \fallingdotseq 1 - \frac{1}{2}\times\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{2c^2}$$

いかがですか？光の往復時間は，運動する C の方が短く観測されています。すなわち，これは運動する C の時計の方が，静止している B の時計より遅く進むことを表していることになりますね。

最後の問題（問 3）が，本問のハイライトです。人工衛星は地表面よりも高いところにありますから，一般相対性理論によって人工衛星の時計は地表面の時計より進みます。一方で，人工衛星は地表面に対して運動していますから，特殊相対性理論によって人工衛星の時計は遅れます。それらの効果をそれぞれ $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{B}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$，$\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{B}}}$ で計算させており，合計した結果を $\dfrac{\Delta t_{\mathrm{C}}}{\Delta t_{\mathrm{A}}}$ で計算させている，ということになります。計算結果を見ると，GPS に用いられる人工衛星の時計は，一般相対性理論による効果の方が特殊相対性理論による効果よりも大きいことが一目瞭然ですね。

少し長くなりました。今回はここまで。またお会いしましょう。