第 41 回の問題の解答編です。

解答解説に入る前に簡単な問題の講評です。

第 41 回の問題は，(2) が難しく，ここから前へ進めなかった人が多かったかもしれません。ところが，(3) は (2) とはつながりがありません。しかも，(3) はそれ程難しくありません。この (3) に手を付けることができたかどうかが，この問題で合格点を取るための大きな鍵を握っています。どこの大学の問題でも，必ずしも前の設問が解けなければ後の設問が解けないと言う訳ではありません（私の授業を受けている人は授業中に何回かそのことを聞いたはずです）。難しい設問の後の設問が点数の稼ぎどころである場合も少なくありません。入試直前ですので，特に受験生の皆さんはそのことを忘れずに試験を受けるようにしてください。

1 つお詫びがあります。第 41 回の問題に誤植がありました。(3) の下 3 行が

「コンデンサーを接続したときの台車の振動は，(2) で考察した場合に比べて，｛ル：① ばね定数 ，② 台車の質量｝を $\boxed{\text{ヲ}}$ だけ｛ワ：① ばね定数 ，② 台車の質量｝させたときの振動と同じになる。」

となっていますが，正しくは

「コンデンサーを接続したときの台車の振動は，(1) で考察した場合に比べて，｛ル：① ばね定数 ，② 台車の質量｝を $\boxed{\text{ヲ}}$ だけ｛ワ：① 増加 ，② 減少｝させたときの振動と同じになる。」

となります。申し訳ありませんでした。

【解答】

(1)

台車の変位が x のときの加速度（右向き正）を a とする。

運動方程式

$$ma = -kx$$

$$\therefore a = -\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2 (x-0)$$

よって，台車の運動は単振動となり

振動中心：$x_{\mathrm{C}} = 0$

角振動数：$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$t=0$ に $x=-A$ で台車から静かに手を離すことから

振幅 $a = A$

初期位相 $\delta = \dfrac{3}{2}\pi$ （または $\delta = -\dfrac{\pi}{2}$ ）

以上より

$$x = x_{\mathrm{C}} + a\sin(\omega t + \delta)$$

x_{C}，ω，a，δ を代入して

$$x = 0 + A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{3}{2}\pi\right) = -A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

（→ $\boxed{\text{イ}}$ の答）

台車が右方に運動しているとき，誘導起電力は b から a に電流を流す向きとなるので，a が高，b が低電位になる。（→①）

（→ ｛ ロ ｝ の答）

台車の変位が x のときの速度(右向き正)を v とする。

b を基準とした a の電位

$$V = vBl$$

$v = \dfrac{dx}{dt}$ より

$$V = \frac{dx}{dt}Bl$$

x を代入して

$$V = BlA\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

（→ $\boxed{\text{ハ}}$ の答）

(2)

一往復の運動を近似的に振幅 A の単振動と見なす。

ω を用いて

$$V = BlA\omega\sin\omega t$$

抵抗での消費電力

$$P = \frac{V^2}{R}$$

V を代入して

$$P = \frac{(BlA\omega)^2}{R}\sin^2\omega t$$

一往復の間に抵抗 R で発生するジュール熱

$$W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P dt$$

P を代入して

$$W = \frac{(BlA\omega)^2}{R}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\, dt$$

$$= \frac{(BlA\omega)^2}{R}\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\, dt$$

$\sin^2\omega t$ の一周期の時間平均値

$$\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\, dt$$

$\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle$ を用いて

$$W = \frac{(BlA\omega)^2}{R}\frac{2\pi}{\omega}\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle$$

$\left\langle\sin^2\omega t\right\rangle = \frac{1}{2}$ より

$$W = \frac{\pi(BlA)^2}{R}\omega$$

ω を代入して

$$W = \frac{\pi(BlA)^2}{R}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(→ $\boxed{\text{ニ}}$ の答)

一往復の間の台車の運動エネルギーの変化を ΔK，バネの弾性エネルギーの変化を ΔU とする。

エネルギー関係

$$-W = \Delta K + \Delta U$$

バネの弾性エネルギーの減少を $\Delta U' = -\Delta U$ とし，$\Delta K = 0$ より

$$W = \Delta U'$$

よって，ジュール熱 W は，ばねの弾性力によるエネルギーから供給される。(→②)

(→ ｛ ホ ｝ の答)

ここで

$$\Delta U' = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

となるので

$$W = \frac{1}{2}kA^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

$x < 0$ より

$$x = -A\times\sqrt{1-\frac{2W}{kA^2}}$$

(→ $\boxed{\text{ヘ}}$ の答)

(3)

台車の変位が x，速さが v のとき

コンデンサーに蓄えられる静電エネルギー

$$U_1 = \frac{1}{2}C(vBl)^2$$

ばねの弾性力による位置エネルギー

$$U_2 = \frac{1}{2}kx^2$$

台車の運動エネルギー

$$U_3 = \frac{1}{2}mv^2$$

(→ $\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{リ}}$ の答)

全エネルギー

$$E = U_1 + U_3 + U_3$$

U_1，U_2，U_3 を代入して

$$E = \frac{1}{2}\{m + C(Bl)^2\}v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

よって，コンデンサーを接続することと，台車の質量を変化させることとは，台車の運動に関して同じ働きをしている。(→②)

(→ ｛ ヌ ｝ の答)

$C = 0.10[\mathrm{F}]$，$l = 0.50[\mathrm{m}]$，$B = 1.0[\mathrm{Wb/m^2}]$ のとすると，コンデンサーを接続したときの台車の振動は，(1) で考察した場合に比べて，台車の質量（→②）を $C(Bl)^2 = 2.5\times10^{-2}$ だけ増加（→①）させたときの振動と同じになる。

(→ ｛ ル ｝, $\boxed{\text{ヲ}}$, ｛ ワ ｝ の答)

強者の戦略

【解説】

まず，【解答】について少し補足です。

(1) についてはほぼ問題ないでしょう。誘導起電力を考えるときに微分を使って良いものか迷った人もいると思いますが，ここは微分を使わなければ，近似式を使って計算することになります。近似式が与えられている訳ではないですし，過程を書く必要がないので，遠慮せず微分しましょう。

(2) については積分を使って良いか迷った人が多いのではないでしょうか（(1) の微分以上に)。もしかすると，積分を使って良いか迷う以前に，「エネルギー関係」から抵抗のジュール熱を求めようとして失敗した人が多いのではないかと思います。「エネルギー関係」から抵抗のジュール熱を求めるのはコンデンサー回路の問題では絶対に知っておかなければならないことです。しかし，ここでは折り返し点の変位をエネルギー関係から求める必要があります。抵抗のジュール熱は直接求めなければならないのです。ただし，解答では積分を使っている感じを少し和らげるために平均値を使っています。出題者もおそらく平均値を使って解答することを想定していたのではないかと思います。(2) については後で詳しく説明します。

(3) については最初の３つの設問は驚きでしょう。(2) ができなくても挫けず (3) を解こうとした人へのご褒美です。ここに手を付けることができたかどうかで大きさ差が付くでしょう。この問題は，個人的にとても好きな問題なのですが，１つだけ残念だったのが (3) の最後でこの振動の周期を問う設問がなかったことです。京大の先生が作成された問題に対して意見するなんて生意気ですが。

☆ (2) について

「運動方程式」と「キルヒホッフの法則」から，「台車の運動の様子」，「エネルギー関係」について考察します。

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt}=-kx-Bil\cdots①$$

キルヒホッフの法則

$$vBl-Ri=0\cdots②$$

◎エネルギー関係

① の両辺に $v=\dfrac{dx}{dt}$ をかけて

$$mv\frac{dv}{dt}=-kx\frac{dx}{dt}-Bilv\cdots②$$

② の両辺に i をかけて

$$vBli-Ri^2=0\cdots④$$

③，④ より

$$mv\frac{dv}{dt}=-kx\frac{dx}{dt}-Ri^2$$

$$\therefore -Ri^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)$$

両辺を t で積分して

$$-W=\Delta K+\Delta U$$

となります。

◎台車の運動の様子

② より

$$i=\frac{Bl}{R}v$$

① に代入して

$$m\frac{dv}{dt}=-kx-B\left(\frac{Bl}{R}v\right)l$$

$$\therefore m\frac{dv}{dt}+\frac{(Bl)^2}{R}v+kx=0$$

$v=\dfrac{dx}{dt}$ より

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{(Bl)^2}{R}\frac{dx}{dt}+kx=0$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{(Bl)^2}{mR}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=0$$

これは「斉次の定数係数２階線形微分方程式」です。では，ここで「斉次の定数係数２階線形微分方程式」の一般論について説明しましょう。

「斉次の定数係数２階線形微分方程式」の解法

斉次の定数係数２階線形微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$$

(i) $a^2-4b<0$ のとき

$y=e^{kt}x$ とおくと

$$x=e^{-kt}y$$

$$\frac{dx}{dt}=e^{-kt}\left(-ky+\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-kt}\left(k^2y-2k\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

となるので

$$e^{-kt}\left(k^2y-2k\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right)+ae^{-kt}\left(-ky+\frac{dy}{dt}\right)+be^{-kt}y=0$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dt^2}+(a-2k)\frac{dy}{dt}+(k^2-ak+b)y=0$$

ここで $a-2k=0$ となるように k をとる，すなわち $k=\frac{1}{2}a$ とすると

$$k^2-ak+b=\left(\frac{1}{2}a\right)^2-a\left(\frac{1}{2}a\right)+b=\frac{1}{4}(4b-a^2)$$

となるので

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{4}(4b-a^2)y=0$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{1}{4}(4b-a^2)y$$

$a^2-4b<0$ より $4b-a^2>0$ だから

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)^2y$$

(→単振動の微分方程式)

この微分方程式の一般解

$$y=A\sin\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)t+\delta\right\}$$

(A：振幅，δ：初期位相)

$y=e^{kt}x$ と $k=\frac{1}{2}a$ より

$$A\sin\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)t+\delta\right\}=e^{\frac{1}{2}at}x$$

$$\therefore x=e^{-\frac{1}{2}at}A\sin\left\{\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)t+\delta\right\}$$

(→減衰振動)

(ii) $a^2-4b>0$ のとき

x の２次方程式 $x^2+ax+b=0$ は相異なる２つの実数解を持つ。その２解を α，β とする。

解と係数の関係より

$$a=-(\alpha+\beta)$$

$$b=\alpha\beta$$

これより $\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0$ を書き直すと

$$\frac{d^2x}{dt^2}-(\alpha+\beta)\frac{dx}{dt}+\alpha\beta x=0$$

この式を変形して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\beta x\right)=\alpha\left(\frac{dx}{dt}-\beta x\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\alpha x\right)=\beta\left(\frac{dx}{dt}-\alpha x\right)$$

これらの微分方程式の一般解

$$\frac{dx}{dt}-\beta x=D_1e^{\alpha t}\cdots ①$$

$$\frac{dx}{dt}-\alpha x=D_2e^{\beta t}\cdots ②$$

(D_1，D_2：積分定数)

①－② より

$$(\alpha-\beta)x=D_1e^{\alpha t}-D_2e^{\beta t}$$

$$\therefore x=\frac{D_1}{\alpha-\beta}e^{\alpha t}+\frac{(-D_2)}{\alpha-\beta}e^{\beta t}$$

改めて

$$C_1=\frac{D_1}{\alpha-\beta}$$

$$C_2=\frac{(-D_2)}{\alpha-\beta}$$

とおくと

$$x=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}$$

(→過減衰)

(iii) $a^2-4b=0$ のとき

x の２次方程式 $x^2+ax+b=0$ は重解を持つ。その重解を α とする。

解と係数の関係より

$$a=-2\alpha$$
$$b=\alpha^2$$

これより $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=0$ を書き直すと

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\alpha\frac{dx}{dt}+\alpha^2x=0$$

この式を変形して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}-\alpha x\right)=\alpha\left(\frac{dx}{dt}-\alpha x\right)$$

この微分方程式の一般解

$$\frac{dx}{dt}-\alpha x=De^{\alpha t}$$

（D：積分定数）

両辺に $e^{-\alpha t}$ をかけて

$$e^{-\alpha t}\frac{dx}{dt}-\alpha e^{-\alpha t}x=D$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(e^{-\alpha t}x)=D$$

両辺を t で積分して

$$e^{-\alpha t}x=Dt+C$$

$$\therefore x=(Dt+C)e^{\alpha t}$$

（C：積分定数）

（→臨界減衰）

以上が「斉次の定数係数２階線形微分方程式」の一般論です。

この問題の場合，「抵抗 R が大きく」とありますので，$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{(Bl)^2}{mR}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{k}{m}x=0$ において $\dfrac{dx}{dt}$ の係数 $\dfrac{(Bl)^2}{mR}$ が小さくなります。よって，$\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=0$ において $\dfrac{dx}{dt}$ の係数 a が小さい場合に相当します。すると $a^2-4b<0$ と考えることができ，この問題において台車の運動は「減衰振動」になります。さらに言うと，「減衰振動」の一般解 $x=e^{-\frac{1}{2}at}A\sin\left\{\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)t+\delta\right\}$ において，a が小さいことから $e^{-\frac{1}{2}at}$ の部分の変化が緩やかなため，「台車は $x=-A$ から動き始め，再び $x=-A$ の近傍に戻って折り返した」ことになる訳です。

以上で解答解説は終了です。

「減衰振動」の一般解を高校生が理解できる解法で説明しましたが，大学生向けの説明でも，解の形を仮定する方法，複素関数論の理解が十分でない学生が多いにも関わらず（理学部で数学を専攻していない学生が複素関数論を十分に理解することはなかなか難しいです）$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いた方法がほとんどで，納得のいく説明に出会うことはなかなかないかもしれません。理学部や工学部の物理系に進む人は，大学生になって「減衰振動」と再会する可能性が高いと思われます。そのときに理解に苦しんでいる友達がいたときに今回の説明で教えてあげると感謝されるかもしれませんよ（笑）

それでは受験生の皆さんの健闘を祈ります！