

強者の戦略

研伸館の藤原です。強者の戦略 HP 物理ページ第51回（問題編），第52回（解答編）を担当させていただきます。

今回の掲載問題は東京大学2006年度後期試験，総合科目Ⅱからの出題です。総合科目Ⅱは毎年，大問2問構成です。2006年度は今回紹介する問題以外に，以前このページの第5，6回で米田先生が紹介した「三相交流」が出題されました。三相交流の方は三角関数にまつわる交流回路がテーマでしたが，今回紹介する問題は「微分方程式」がテーマとなっています。「微分方程式」は高校物理を少し超えた発展的な内容を扱う際に頻繁に登場する式なので，知っている方も多いかもかもしれません。その割にこのページでは意外に今まで扱っていなかった様なので，今更ながら取り上げたいと思います。

余談ですが，最近車の安全運転をやたらと注意するようにしています。昔は妙に自分の運転に根拠のない自信があったのですが，年を重ねると共に自信よりも不安の方が勝るようになっていきます（万が一の事があってはいけない）。今回の問題は微分方程式よりもむしろシートベルトをテーマに扱っていた為，興味を引かれました。

ガソリンエンジンの自動車が開発されたのが19世紀の終わり頃，シートベルトが一般自動車に使用されだしたのは20世紀中頃だったらしいです（映画にもなった幻の名車「タッカー」が初めてシートベルトを導入した一般自動車だ！という説も聞きますが，本当ならまさに天才の偉業だな，と思います）。

21世紀の現代では使用するのが当たり前になっているシートベルトですが，「シートベルトが柔らかすぎたらフロントガラスやハンドルに衝突してしまう」「シートベルトが固すぎたら引っ張る力で肋骨が骨折してしまう」「ちょうど良い状態を考えなければ人命救助に役立たない。」と，その構造には絶妙なバランスが要求されます。現在の車は，エアバック，ABSなど高い安全性能を誇る様々な機能が付いていますが，やはりシートベルトを超える発明は無いのでしょうか。

今回の問題は微分方程式から理想的なシートベルトを考察する問題になっています。問題の挑戦と共に，車って色々工夫されてるんだなあ，と感ずてみて下さい。

【問題】 シートベルト 『出典：2006年度 東京大学 理科後期 総合科目Ⅱ』（考察時間：30分）

A

自動車のシートベルトに要求される機能は，衝突などにより自動車が急激に減速した時に，運転手が自動車の前方に投げ出されてハンドルなどに体をおつけることがないように，運転手を座席側に引っ張る力を発生することである。このシートベルトの機能について考えることにする。

自動車を図1のようにモデル化する。自動車も運転手も図の水平方向にのみ運動するものとし，自動車の質量を m_c ，運転手の質量を m_d とする。自動車は左から右方向へ一定の速さ V_0 で移動し，前方の剛体の壁に衝突し，やがて停止するものとする。自動車の前部には衝撃緩和装置であるバンパーが取り付けられている。衝突の瞬間にバンパーの前部と壁は一体化し，その後バンパーは自動車が停止するまでの間，自動車の速さに比例する抵抗力を発生しながら縮むものとする。このときの比例係数（バンパーの減衰係数）を γ 。

強者の戦略

とし正の定数とする。

自動車が壁に衝突し運転手が座席から前方に投げ出されるときに、シートベルトはその運転手の移動を妨げる向きに抵抗力を発生しながら伸びるものとする。その抵抗力は、運転手が座席に対して移動する速さに比例する。このときの比例係数（シートベルトの減衰係数）を γ_d とし正の定数とする。

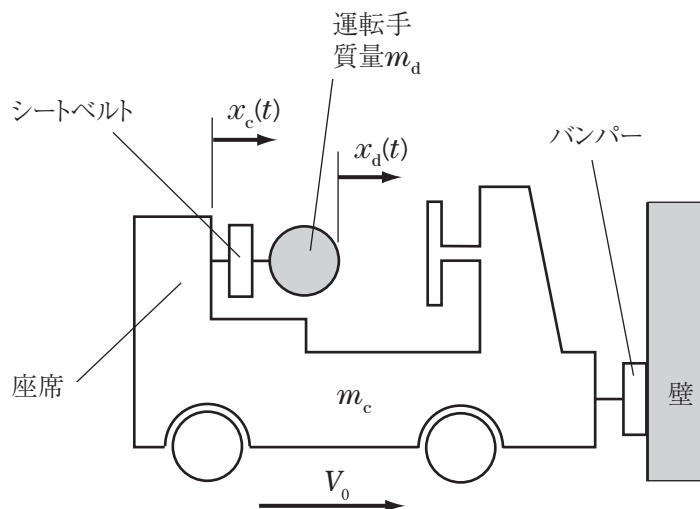


図 1

図 1 は衝突開始時刻 $t = 0$ での状態を表している。衝突開始から時刻 t までの自動車の座席の地面から見た移動距離を $x_c(t)$ 、運転手の地面から見た移動距離を $x_d(t)$ とする。自動車のバンパーとシートベルト以外の部分は剛体とし、運転手と座席との間の摩擦は考えないものとする。また、自動車の運動を考える際は運転手の質量を無視してよく、運転手の運動は自動車の運動に影響を及ぼさないものとする。

以下の全ての設問において、

$$\frac{\gamma_c}{m_c} = k_c, \quad \frac{\gamma_d}{m_d} = k_d \quad (1)$$

として答えよ。ただし、 $k_c \neq k_d$ とする。

(1) $t \geq 0$ における座席（自動車）の運動方程式は

$$m_c \frac{d^2 x_c}{dt^2} = -\gamma_c \frac{dx_c}{dt} \quad (2)$$

と表される。 $t = 0$ では、 $x_c(0) = 0$ 、 $\frac{dx_c}{dt}(0) = V_0$ である。この方程式を満たす $x_c(t)$ は、定数 A 、 B 、 α を用いて

$$x_c(t) = A + Be^{\alpha t} \quad (3)$$

と表される。定数 A 、 B 、 α を V_0 、 k_c を用いて表し、 $t \geq 0$ における座席の移動距離 $x_c(t)$ と、座席の速さを表す式を求めよ。

強者の戦略

(2) $t \geq 0$ における運転手の運動方程式は

$$m_d \frac{d^2 x_d}{dt^2} = -\gamma_d \left(\frac{dx_d}{dt} - \frac{dx_c}{dt} \right) \quad (4)$$

と表される。 $t=0$ では、 $x_d(0)=0$, $\frac{dx_d}{dt}(0)=V_0$ である。この方程式を満たす $x_d(t)$ は、定数 C, D, E, α, β を用いて

$$x_d(t) = C + De^{\alpha t} + Ee^{\beta t} \quad (5)$$

と表される。式⑤の α は式③の α と同じ値であり、 $\alpha \neq \beta$ である。定数 C, D, E, β を V_0, k_c, k_d を用いて表し、 $t \geq 0$ における運転手の移動距離 $x_d(t)$ と、運転手の地面から見た速さを表す式を求めよ。

B

図2に示すように、衝突前の運転手とハンドルとの距離を L とする。このとき以下の設問に答えよ。

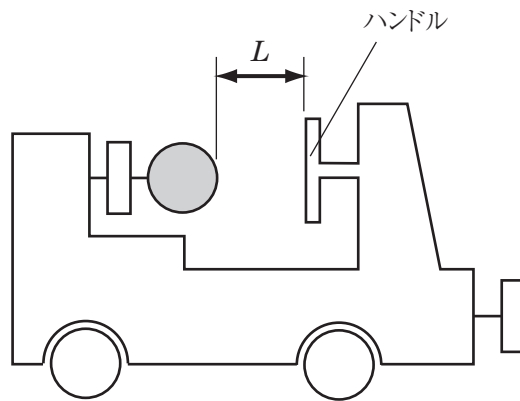


図 2

- (3) 衝突後に、運転手がハンドルにぶつからないためには、シートベルトの減衰係数 γ_d をどのような範囲にしておけばよいか答えよ。ただし、“ぶつかる”とは有限時間内に運転手とハンドルとの距離 $L - (x_d(t) - x_c(t))$ がゼロになることをいう。
- (4) 運転手がシートベルトから受ける抵抗力の大きさが最大になる時刻とそのときの抵抗力の大きさを求めよ。
- (5) 運転手がハンドルにぶつからず、かつ運転手がシートベルトから受ける抵抗力の最大値を出来る限り小さくするためには、シートベルトの減衰係数 γ_d をどのような値にしておけばよいか答えよ。