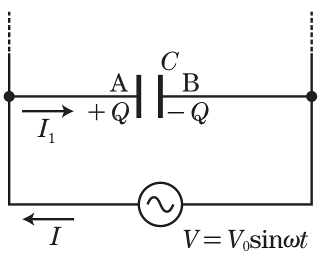
強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です．強者の戦略 HP の物理のページ，第 54 回目は第 53 回目で紹介した『２０１０年度 和歌山県立医科大学 前期日程（改題）』からの出題，「交流回路における力率」に関する問題の解答解説 +α です。

【解答解説】

本解説では第 53 回の紹介文でも示したように『加法定理・近似を用いた解法 VS 微分・積分を用いた解法』および『インピーダンスの計算における作図法』に着目します。問題自体はオーソドックスゆえ，類題の解答の流れを知っていれば，この問題を完答することは難しくありませんので，できれば読者の皆さんには完答するだけでなく，納得することに軸足を置いて頂ければと思います。

(A)



$\boxed{\quad 1 \quad}$

単位時間当たりにコンデンサーに流入する電気量が I_1 であるから，Δt 間における電気量の変化は

$$\Delta Q = I_1 \Delta t \quad \cdots ①$$

$\boxed{\quad 2 \quad}$

Δt 間での電圧の変化量 ΔV は

$$\begin{aligned}\Delta V &= V_0 \sin\omega(t+\Delta t) - V_0 \sin\omega t \\ &= V_0(\sin\omega t \cos\omega\Delta t + \cos\omega t \sin\omega\Delta t) - V_0 \sin\omega t \\ &\fallingdotseq V_0(\sin\omega t + \omega\Delta t \cos\omega t) - V_0 \sin\omega t \\ &= V_0 \omega\Delta t \cos\omega t\end{aligned}$$

ここで，①式から

$$I_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{C\Delta V}{\Delta t} = \omega C V_0 \cos\omega t$$

となる。

【別解１】（加法定理・近似を利用：検定教科書風）

コンデンサーのリアクタンスは $\dfrac{1}{\omega C}$ [Ω] なので，コンデンサーの最大電圧 V_0 と I_1 の最大値 I_{10} の関係は，

$$V_0 = \frac{1}{\omega C} I_{10} \quad \rightarrow \quad I_{10} = \omega C V_0$$

ここで，コンデンサーに流入する電流の位相は，電圧の位相よりも $\dfrac{\pi}{2}$ だけ進んでいるので，

$$I_1 = I_{10} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C V_0 \cos\omega t$$

となる。

【別解２】（微分・積分を利用）

キルヒホッフの法則から

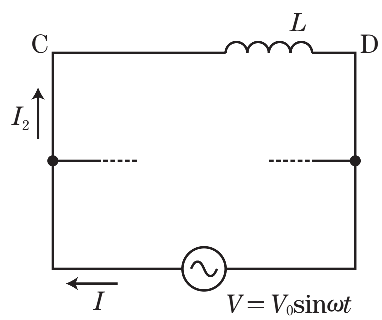
$$\frac{Q}{C} = V_0 \sin\omega t \quad \rightarrow \quad Q = CV_0 \sin\omega t$$

ここで，電流の連続条件（ $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$ ）から

$$I_1 = \frac{dQ}{dt} = \omega C V_0 \cos\omega t$$

が得られる。

$\boxed{\quad 3 \quad}$，$\boxed{\quad 4 \quad}$



キルヒホッフの法則から

$$V - L\frac{\Delta I_2}{\Delta t} = 0 \quad \rightarrow \quad V = L\frac{\Delta I_2}{\Delta t} \quad \cdots ②$$

ここで，コイルに流れる電流の変化 ΔI_2 は

$$\begin{aligned}\Delta I_2 &= I_{20} \sin\{\omega(t+\Delta t)+\alpha\} - I_{20} \sin(\omega t + \alpha) \\ &= I_{20} \sin\{(\omega t + \alpha) + \omega\Delta t\} - I_{20} \sin(\omega t + \alpha) \\ &\fallingdotseq I_{20}\omega\Delta t \cos(\omega t + \alpha)\end{aligned}$$

これを②に代入し，また $V = V_0 \sin\omega t$ ゆえに

$$V_0 \sin\omega t = \omega L I_{20} \sin\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

となる。ここで上式は任意の時刻にて成立するので，

$$I_{20} = \frac{V_0}{\omega L}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

である。以上から，

$$I_2 = \frac{V_0}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$$

となる。

【別解１】（加法定理・近似を利用：検定教科書風）

コイルのリアクタンスは ωL [Ω] ゆえに，V_0 と I_{20} の関係は，

$$V_0 = \omega L I_{20} \qquad \therefore \quad I_{20} = \frac{V_0}{\omega L}$$

ここで，コイルを流れる電流の位相は電圧の位相より $\dfrac{\pi}{2}$ 遅れるので，

$$I_2 = I_{20}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$$

となる。

【別解２】（微分・積分を利用）

キルヒホッフの法則から

$$V = L\frac{dI_2}{dt}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{V}{L} = \frac{V_0}{L}\sin\omega t$$

両辺を t で積分して

$$I_2 = -\frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$$

が得られる（積分定数を 0 としている）。

$\boxed{5}$

キルヒホッフの第１法則（電流の法則）から，

$$I = I_1 + I_2 = \omega C V_0 \cos\omega t - \frac{V_0}{\omega L}\cos\omega t$$

$$= V_0\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\cos\omega t \quad \cdots ③$$

$\boxed{6}$, $\boxed{7}$

③から，$t = 0$ のとき，$I = V_0\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$ となるので，

$\omega C = \dfrac{1}{\omega L}$ となるときに，電流は最小値 $I = 0$ となる。

また，このときの角周波数 ω は $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ である。

$\boxed{8}$

キルヒホッフの法則から，

$$V = RI_2 + L\frac{\Delta I_2}{\Delta t}$$

$\boxed{9}$, $\boxed{10}$

$\boxed{4}$ と同様に考えて，$\Delta I_2 = I_{20}\omega\Delta t\cos(\omega t + \phi)$

となるので，

$$V = RI_{20}\sin(\omega t + \phi) + \omega L I_{20}\cos(\omega t + \phi)$$

ここで，三角関数の合成を考えて，

$$V = I_{20}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t + \phi + \beta) \quad \cdots ④$$

（ただし，$\tan\beta = \dfrac{\omega L}{R}$ ）

となる。④と $V = V_0\sin\omega t$ を比較すると，

$$\phi + \beta = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = -\beta$$

となるので，

$$\tan\phi = \tan(-\beta) = -\frac{\omega L}{R}$$

が得られる。また，$V_0 = I_{20}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ ゆえに

$$I_{20} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \cdots ⑤$$

ここで，$\tan\phi = -\dfrac{\omega L}{R}$ $\rightarrow$ $\omega L = -R\tan\phi$ なので

$$\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = R\sqrt{1 + \tan^2\phi} = \frac{R}{\cos\phi}$$

これを⑤に代入して，

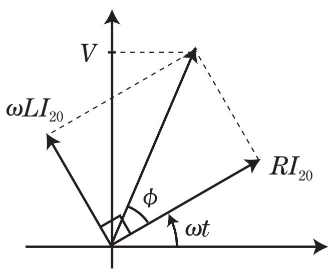
$$I_{20} = \frac{V_0}{R}\cos\phi$$

が得られる。

【別解】（ベクトル図を用いた解法）

$$V = RI_{20}\sin(\omega t+\phi)+\omega LI_{20}\sin\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

において，$RI_{20}\sin(\omega t+\phi)$ を大きさが RI_{20}，位相が $\omega t+\phi$ のベクトルの sin 成分として捉える。また，同様にして $\omega LI_{20}\sin\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)$ を，大きさが ωLI_{20}，位相が $\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}$ のベクトルの sin 成分として捉えると，下図のように大きさ $\sqrt{R^2+(wL)^2}$ ，位相が $\omega t+\phi+\beta$ の合成ベクトルの sin 成分と V が一致することがわかる。



また，ベクトル図から

$$\tan\phi=\frac{\omega L}{R}$$

$$\cos\phi=\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$\rightarrow\quad \sqrt{R^2+(\omega L)^2}=\frac{R}{\cos\phi}$$

これを④に代入して， $I_{20}=\dfrac{V_0}{R}\cos\phi$ が得られる。

＜考察＞力率について

この問題で扱われている「正弦波交流電流」における電力（電圧と電流の積）の計算においては，その電流や電圧が時間的に変化することから，直流電流における諸量の定義に加えていくつかの物理量が定義されています。（任意の時刻における瞬間の電力 $V(t)I(t)$ を瞬時電力 $P(t)$ といい，$P(t)$ は周期的に変化します。）

まず，有効電力（effective power）とは，瞬時電力 $P(t)$ を 1 周期 T にわたって平均した値であり，

$$V(t)=V_0\sin(\omega t)\quad ,\quad I(t)=I_0\sin(\omega t+\phi)$$

とすると，

瞬時電力は $P(t)=V(t)I(t)=V_0I_0\sin(\omega t)\sin(\omega t+\phi)$ で表されるので，有効電力 $\overline{P}$ は周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ として，

$$\begin{aligned}
\overline{P}&=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt\\
&=\frac{V_0I_0}{T}\int_0^T\sin(\omega t)\sin(\omega t+\phi)dt\\
&=\frac{V_0I_0}{T}\int_0^T\frac{\cos(\phi)-\cos(2\omega t+\phi)}{2}dt\\
&=\frac{V_0I_0}{2T}\int_0^T\left\{\cos(\phi)-\cos(2\omega t+\phi)\right\}dt\\
&=\frac{V_0I_0}{2}\cos(\phi)\cdot\frac{1}{T}\int_0^T dt-\frac{V_0I_0}{2}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+\phi)\right]_0^T\\
&=\frac{V_0I_0}{2}\cos(\phi)-0\\
&=\frac{V_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos(\phi)
\end{aligned}$$

が得られます。

ここで, $V(t)$, $I(t)$ の実効値をそれぞれ $\overline{V}$, $\overline{I}$ とすると，有効電力 $\overline{P}$ は

$$\overline{P}=\overline{V}\,\overline{I}\cos(\phi)\quad\cdots⑥$$

で表され，また，皮相電力（apparent power）: S は

$S=\overline{V}\,\overline{I}$ …⑦ で定義されるので，⑥，⑦から

$$\overline{P}=S\cos(\phi)$$

が得られます。

これらのことから，有効電力 $\overline{P}$ は，皮相電力 S の $\cos(\phi)$ 倍であることがわかります。この $\cos(\phi)$ を力率といい，交流電源から供給される電力のうち，実際に消費される電力の割合を示します。ここで，電圧 $V(t)$ と電流 $I(t)$ の位相差 φ（$0<\phi<90^\circ$）の値が 0 に近いほど力率は大きくなる，すなわち供給される電力を有効に利用することができるようになります。実際のモーターなどではこの位相差 φ を小さくするため，進相コンデンサー（電圧の位相を進める，電流の位相に近づける効果がある）などの部品を回路に組み込むことで力率を向上させる工夫がなされています。

ちなみに，無効電力 Q は $Q=\overline{I}\,\overline{V}\sin(\phi)$ で表され，Q が大きいほど無駄な電力を浪費している（家庭レベルで言うと余計な電気料金を支払う）ことになります。

以　上