

強者の戦略

強者サイトをご覧になっている皆さん、こんにちは。数学科の中西です。

夏本番が近づきつつあり、直射日光がづらい日や、蒸し暑い日が続いていますが、体調は万全でしょうか。私がこの前行った動物園では、動物達が日陰の中で動かずにじっとしておくことで、なんとか暑さをやり過ごしているようでした。我々にはクーラーなどの文明の利器がありますから、上手に活用して動ける時間を増やしていきたいですね。

さて今回は、2016年度の入試問題で、『確率』の単元からの出題です。「(場合の数・確率が大好きな)中西が選ばずに、誰が選ぶねん！」という問題を見つけてしまったので、選ばざるを得ませんでした(笑)。夏休みが始まり、じっくり考える時間の取れる今だからこそ、取り組める問題になっていると思います。

それでは、問題です。

問題

サイコロを何回か振って最後に出た目を得点とするゲームを行う。ただし、得点が k となる確率を $p(k)$ としたとき

$$p(1) + 2p(2) + 3p(3) + 4p(4) + 5p(5) + 6p(6)$$

を得点の期待値とよぶ。

- (1) サイコロを1回だけ振ることができるときの得点の期待値 E_1 を求めよ。
- (2) サイコロを2回まで振ることができるとき、1回目に m 以上の目が出たらそこでやめ、 m より小さい目が出たら2回目を振ることにする。このときの得点の期待値 $E_2(m)$ を m を用いて表し、 $E_2(m)$ が最大となる m を求めよ。
- (3) n を2以上の自然数、 m_1, \dots, m_{n-1} を6以下の自然数とする。 n 回までサイコロを振ることができるとき、 i 回目に m_{n-i} 以上の目が出たらそこでやめ、 m_{n-i} より小さい目が出たら $i+1$ 回目を振るという規則でサイコロを振り続ける。ただし、 n 回サイコロを振ったらそこでやめる。このときの得点の期待値を

$$E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (i) $E_3(m_1, m_2)$ を $E_2(m_1), m_2$ を用いて表し、 $E_3(m_1, m_2)$ が最大となる m_1, m_2 とそのときの $E_3(m_1, m_2)$ の値を求めよ。
- (ii) $n \geq 4$ とする。 $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$ の最大値を e_{n-1} とすると、 $E_n(m_1, \dots, m_{n-1})$ が最大となるのは、 $E_{n-1}(m_1, \dots, m_{n-2})$ が e_{n-1} となり、かつ m_{n-1} が e_{n-1} 以上の最小の自然数となるときである。このことを示せ。

現在の教育課程では、数学Bの『確率分布と統計的な推測』に含まれている「期待値」の内容を絡めた問題です。もちろん、出題大学は「数学Bは『数列』と『ベクトル』を選択」している大学なので、期待値については問題文の中で定義を説明しています。研伸館の講師の中では「きっとどっかの大学が、定義だけ与えて「期待値」を出題してくるに違いない」と噂されていたので、見つけたときは「やっぱりな〜」という感じでした。

元々の入試問題では最後に書いてあった期待値の定義を最初の方に移していますが、その他の問題文はまったく同じものです。メインテーマは(3)ですので、真の強者には(ii)を、強者にならんとしている過程にある方にも(i)だけでも取り組んでみて欲しいです。

「問題文を声に出して音読する」

「文字に具体的な数を代入して実験してみる」

などの方法で大量の文字に負けないようにして、問題文の意図をつかんでみてください。

それでは、解答編でお待ちしています。