

# 強者の戦略

座標平面上の3点  $P(x, y)$ ,  $Q(-x, -y)$ ,  $R(1, 0)$  が鋭角三角形をなすための  $(x, y)$  についての条件を求めよ。また、その条件をみたす点  $P(x, y)$  の範囲を図示せよ。

## 《考え方》

鋭角三角形となるための条件について、一般的に確認しておきましょう。

### 【辺の長さに注目】

3辺  $a, b, c$  に対し

$$a^2 + b^2 > c^2$$

$$b^2 + c^2 > a^2$$

$$c^2 + a^2 > b^2$$

の全てが成り立つことが条件です。  $a \leq b \leq c$  と条件をつけておけば、  $c$  が最大なので、下2つの不等式の成立は明らかのため

$$a^2 + b^2 > c^2$$

のみで足ります。「最大辺」と「残る2辺」の話です。直角三角形でいう

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を経由すれば分かりやすいはずです。

なお、例えば  $c$  を最大辺として

$$a^2 + b^2 > c^2$$

が成り立てば、  $a, b, c$  が全て正であることから

$$a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + b^2 > c^2$$

$$\therefore (a+b)^2 > c^2$$

$$\therefore a+b > c$$

が成り立つため、「三角形の成立条件」も成り立つてくれます。

さらに、ここでは「長さ」に注目としておりますが、余弦定理より、例えば、長さが  $a$  と  $b$  である2辺の間の角を  $\theta$  ( $0 < \theta < \pi$ ) とするとき

$$\cos\theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

のように表せるので

$$a^2 + b^2 > c^2$$

の条件から

$$\cos\theta > 0$$

が導け、  $0 < \theta < \pi$  に注意すると

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

であることが、つまり、  $\theta$  が鋭角であることが確認できます。

余弦定理を踏まえれば、直接的に「角度」に注目しているとも言うことができます。

### 【内積の利用】

三角形  $ABC$  に対して

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} > 0$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} > 0$$

の全てが成り立つことが条件です。これも

$$\cos\angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$$

であることから

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0 \iff \cos\angle BAC > 0$$

と捉えていることに他なりません。なお、三角形の成立条件についても、辺の長さに注目したときと同様に保たれます（詳細は解答にて）。

長さにせよ内積にせよ、最終的には内角の『余弦』（コサイン）を利用しています。なお、『正弦』（サイン）の場合、鋭角と鈍角とで区別がつかない（ともに正の値をとる）ので不向きです。『正接』（タンジェント）は鋭角・鈍角の区別が付きませんが、公式の道具が少ないため、あまり使われません。三角比ではなく、文字通り「角度そのもの」を考えていくのは、幾何などのように、具体的に辺の長さや角度が与えられていないと厳しいです。

では、以下、模範解答です。

# 強者の戦略

《解1》 辺の長さに注目

まず

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (-x-x)^2 + (-y-y)^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR^2 &= \{1 - (-x)\}^2 + \{0 - (-y)\}^2 \\ &= x^2 + 2x + y^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RP^2 &= (x-1)^2 + (y-0)^2 \\ &= x^2 - 2x + y^2 + 1 \end{aligned}$$

であり、題意を満たす条件は

$$PQ^2 < QR^2 + RP^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$QR^2 < RP^2 + PQ^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$RP^2 < PQ^2 + QR^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の全てが成り立つことである。

なお、三角形PQRが存在するための条件は

$$PQ < QR + RP \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$QR < RP + PQ \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$RP < PQ + QR \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

の全てが成り立つことであるが、例えば①が成り立てば

$$\begin{aligned} (QR + RP)^2 - PQ^2 & \\ &= (QR^2 + RP^2 - PQ^2) + 2QR \cdot RP \\ &> 0 \end{aligned}$$

より、④は成り立つ。同様に②から⑤が、③から⑥が成り立つ。よって、①、②、③の全てが成り立つとき、確かに三角形PQRは存在する。

したがって、求める $(x, y)$ の条件は

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 < 2x^2 + 2y^2 + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1 \end{aligned}$$

かつ

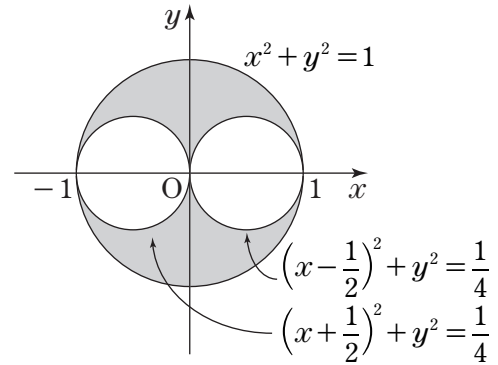
$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 1 \\ &\quad < 5x^2 - 2x + 5y^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 1 \\ &\quad < 5x^2 + 2x + 5y^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

また、点 $P(x, y)$ の存在範囲は、上記の不等式が表す領域を図示することにより、下図の色付き部分である(境界除く)。



《解2》 内積の利用

まず

$$\vec{PQ} = (-2x, -2y), \quad \vec{PR} = (1-x, -y)$$

$$\vec{QP} = (2x, 2y), \quad \vec{QR} = (x+1, y)$$

$$\vec{RP} = (x-1, y), \quad \vec{RQ} = (-x-1, -y)$$

であり、題意を満たす条件は

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PR} > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{QP} \cdot \vec{QR} > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\vec{RP} \cdot \vec{RQ} > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の全てが成り立つことである。

なお、三角形PQRが存在するための条件は

3点P, Q, Rが全て異なり、かつ、

3点が同一直線上に並ばない

ことであるが、いずれか2点が一致するときは、上で用いている6つのベクトルの中に $\vec{0}$ が含まれることになるので、①、②、③の全てが成立することはない。また、3点P, Q, Rが同一直線上に並ぶとき、例えばP, Q, Rの順に並ぶとすると、 $\vec{QP}, \vec{QR}$ のなす角は $\pi$ となるので、このとき②は不成立。同様に、いずれの順で並ぶ場合も、①、②、③の全てが成立することはない。よって、①、②、③の全てが成り立つとき、確かに三角形PQRは存在する。

# 強者の戦略

したがって、求める  $(x, y)$  の条件は

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff -2x(1-x) + (-2y) \cdot (-y) > 0 \\ &\iff x^2 - x + y^2 > 0 \\ &\iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\iff 2x(x+1) + 2y \cdot y > 0 \\ &\iff x^2 + x + y^2 > 0 \\ &\iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 > \frac{1}{4} \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\iff (x-1)(-x-1) + y \cdot (-y) > 0 \\ &\iff -(x^2-1) - y^2 > 0 \\ &\iff x^2 + y^2 < 1 \end{aligned}$$

である (以下略).

## 《コメント》

いかがだったでしょうか。「内積が全て正」であることから、自動的に、三角形の成立条件も満たしてくれていること、およびその証明については、是非確認しておいてください。

なお、本問については、点  $P$  と点  $Q$  が原点对称であることなど特殊性があるので、実際はここまで難しく考える必要はなく、三角形の成立条件としては

$$y \neq 0$$

で済みます。

また、今回の利用は難しいですが、「鋭角」、「直角」、「鈍角」の分類として、『円』を利用する考え方も知っておいてください。

例えば、本問において

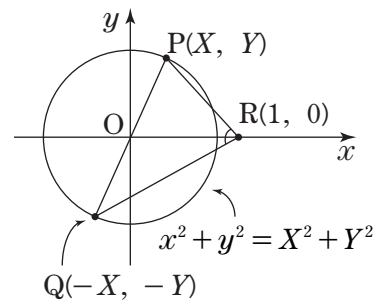
鋭角三角形となる条件

ではなく

$\angle PRQ$  が鋭角となる条件

だったらどうでしょうか？

この場合は、下のような  $PQ$  を直径とする円を考えます (2点  $P, Q$  が異なるという前提のもとで)。



なお、混同を避けるため、 $P(X, Y)$ 、 $Q(-X, -Y)$  と、大文字にしています。その上で、件の円は

$PQ$  の中点である  $O$  中心、

半径  $\sqrt{X^2 + Y^2}$  の円

であり、点  $R$  がこの円の外側にあるとき、 $\angle PRQ$  は鋭角となります。

よって、 $R(1, 0)$  が

$$x^2 + y^2 > X^2 + Y^2$$

で表される領域に存在することが条件より

$$1^2 + 0^2 > X^2 + Y^2$$

$$\iff X^2 + Y^2 < 1$$

となります (実際は、三角形の成立条件より、ここに  $Y \neq 0$  が追加されます)。

なお

点  $R$  がこの円の内側  $\iff \angle PRQ$  は鈍角

点  $R$  がこの円周上  $\iff \angle PRQ$  は直角

と対応します。

特定の角のみに注目する場合は、このように

その角の対辺を直径とする円を考え、

その円の外側か内側か円周上か

で判断することができます。ただ、 $\angle PQR$ 、 $\angle RPQ$  についてもあとは同様に考えるだけであるとは言え、本問ではやや面倒な印象を受けますね。

では、今回はここまでです。お疲れ様でした。

(研伸館数学科 野口)