

強者の戦略

研伸館の藤原です。強者の戦略 HP 物理ページ第56回（問題編）、第57回（解答編）を担当させていただきます。

今回の掲載問題は岩手大学で1984年（昭和60年）に出題された問題の改題です（そのころ私は仮面ライダーの変身ベルトを毎日装着していました）。

この時代の高校履修範囲は現在と大分異なり、「回転運動と力のモーメントの関係」なども履修範囲に入っていました。現在の高校物理では、力のモーメントはつり合い条件しか扱いません。運動に関しては、高校で質点（大きさがほぼ0）の並進運動（位置の変化）を扱い、大学に入ってから質点の集合体（流体、剛体など）の運動を扱います。その際に剛体に関しては微積分／座標変換／ベクトル外積計算などを用いて、回転運動に関する法則を数学的に“厳密”に導きだします。

昔の高校の教科書はそこまで数学的には解説していないと思います。恐らく結論だけを述べているのだと思います。現代の感覚で考えると、それは生徒に様々な誤解を生じさせるかなり無茶な教え方だな、という印象です。教育課程は過去何度も変更されてきていますが、物理に関しては「より曖昧さを排除して、誤解を生じさせない形」に洗練されてきたのだと思います。

ただ丁寧ではない突き放した説明の仕方は、生徒に「誤解」を生じさせやすい一方で、意欲のある生徒に関しては「色々な事を想像させる」メリットもあるかと思います。大学の自主ゼミなどでは普通の事ですが、多分良くわからない部分について生徒同士があれこれ議論したり、先生に仮説を持って行って、仮説を先生に論理的に叩きつぶされたり、なんてやりとりも今よりたくさんあったのではないのでしょうか。それってある意味「アクティブラーニング」だと思います。

2020年から大学入学希望者へのテスト形式が変化します。公開されている情報から、理科に関しては下の2点のような出題が多くなるかと予想されます。

- (1) 具体的な実験などをテーマに、実験データから必要・不必要な情報を見分けたり、実験結果を変えるために必要な要素を検討させる問題。
- (2) 高校の履修範囲以外の科学的テーマについて、必要な知識は与えた上でその場で検討させる問題。

(1) は比較的トレーニングしやすいかと思います。履修した法則や公式を拠り所にしてデータを見れば、公式に登場しない値は不必要なデータと判断出来ますし、また実験について考える際に「測定誤差を減らすにはどうすれば良いか」という点を強く意識して考える様にすれば、実験結果を変える要素を考えるトレーニングになると思います。

やっかいなのは(2)だと思います。一部の大学のAOや推薦入試では見かける形かと思います（事前に説明会や討論が行われた後でテスト実施）。また、東大後期の総合科目Ⅱなども、高校履修範囲以外のテーマを見かける場合が多いですね。「その場で与えられた事をその場で使いこなす能力（臨機応変）」を鍛えるのは、かなり時間がかかる事だと思います（この能力がある人は本当に有能だと思います）。現時点では効率的な方法が思い当たりません。現時点では、せいぜい「履修範囲にとらわれず、様々な事に興味や疑問を常に持つようにしておく」ぐらいしか思いつきません。

強者の戦略

今回は普段と異なり、現在の高校範囲ではない【問題】を出題します。また、【問題】の前に必要な知識を【参考理論】として簡潔に記載します。実際の学力評価テストとは異なる形かと思いますが、「知識ではなく知恵をためす問題」の1つの形かと思います。挑戦してみてください。

【参考理論】回転運動と力のモーメント

質量 m の質点が、図1のように原点 O から距離 r の点を運動しており、 r に垂直な速度を v とする。このとき質点が受ける外力の、 r に垂直な成分を F とする。また微小時間 Δt が経過した後、質点が原点 O から距離 $r+\Delta r$ の点を運動しており、 $r+\Delta r$ に垂直な速度を $v+\Delta v$ とする。

直線運動をしておらず、 v 、 F と $v+\Delta v$ の向きが異なる場合、運動量変化と力積の式

$$m(v+\Delta v)-mv = F\Delta t \quad \text{は誤りである。}$$

ただ、以下の様な式は成立する事が知られている。

(数学的証明は省く)

$$m(v+\Delta v)\cdot(r+\Delta r)-mv\cdot r = (Fr)\Delta t$$

左辺の $L = mv\cdot r$ は、回転の運動量を表す数値で「角運動量」と呼ばれる。角運動量変化を ΔL と表すと上記の式は、

$$\Delta L = (Fr)\Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = Fr$$

となり、 $\Delta t \rightarrow 0$ として力のモーメント Fr は、角運動量 L の時間変化率 $\frac{dL}{dt}$ と一致する。

$$\frac{dL}{dt} = Fr$$

図2のように、質点が原点 O から一定の距離 r で円運動している場合を考えて、ある瞬間の角速度を ω とすると、

$$v=r\omega, \quad L=mr^2\omega \quad (m \text{ と } r \text{ は一定})$$

であり、上式は

$$mr^2 \frac{d\omega}{dt} = Fr$$

に変形出来る。左辺の mr^2 は回転のしにくさを表す数値で、「慣性モーメント」と呼ぶ(移動のしにくさを表す数値を「(慣性)

質量 m 」と呼ぶ)。また $\frac{d\omega}{dt}$ は「角加速度」

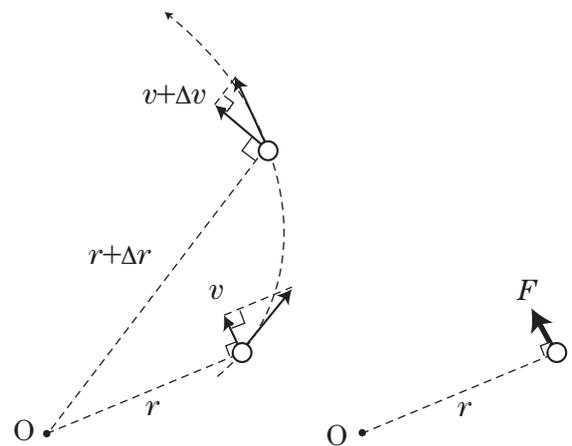


図 1

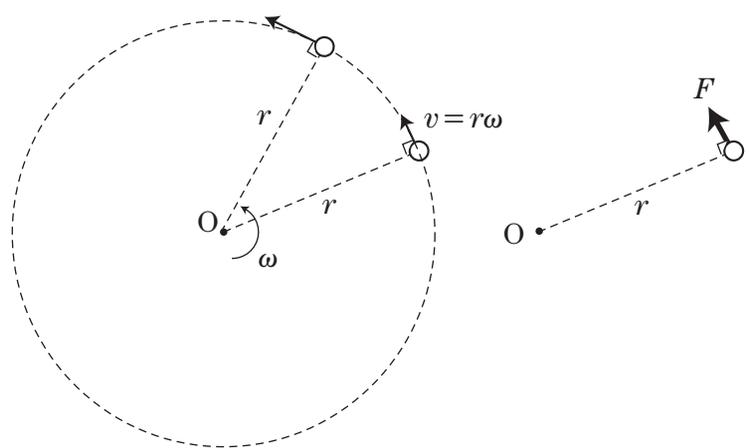


図 2

強者の戦略

と呼ぶ。

最後に複数の質点が合わさって1つの剛体となり、ある定点 O の周りを回転している場合を考える。この場合、剛体内で質点同士が互いに与え合う逆向きの力のモーメントは和が 0 となり、剛体全体の回転には影響しない。剛体の外部から与えられる力のモーメントの和 N が、角加速度 $\frac{d\omega}{dt}$ を生み出し、慣性モーメントの和を I とすると、

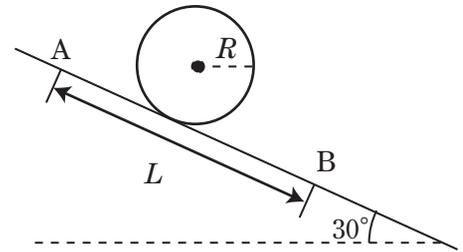
$$I \frac{d\omega}{dt} = N$$

が成り立つ。この方程式は「回転の運動方程式」と呼ばれる。

【問題】 滑る場合と転がる場合 『出典：1984年度 岩手大学 工学部 改』（考察時間：30分）

均一な材質で作られた、質量 M 、半径 R の円柱がある。この円柱の中心軸の周りの慣性モーメントの和は $I = \frac{1}{2} MR^2$ である。

この円柱が、水平面と 30° 傾いた斜面上に沿って、円柱と斜面の接点 A から初速 0 で、ころがらずにすべり落ちる場合と、すべらずにころがり落ちる場合について以下の問いに答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。



斜面との摩擦抵抗がなく、円柱がころがらずにすべり落ちる場合を考える。

- (1) 斜面上に沿った重心の加速度の大きさを a_1 としたとき、円柱の重心の運動方程式を立てよ。
- (2) 円柱の重心の加速度の大きさ a_1 を求めて、円柱が A から斜面上に距離 L 離れた位置 B に接するまでにかかる移動時間を求めよ。

斜面との摩擦抵抗があり、円柱がすべらずにころがり落ちる場合を考える。このとき、斜面上に沿った重心の加速度を a_2 、中心軸の周りの角加速度を $\alpha (= \frac{d\omega}{dt})$ 、斜面上にそった摩擦力の大きさを F とする。

- (3) 円柱の重心の運動方程式を立てよ。
- (4) 重心から円柱全体を見たときの、中心軸の周りの回転の運動方程式を立てよ。
- (5) (3)、(4) の式と、円柱が斜面の接点ですべらないときの関係式 $R\alpha = a_2$ を用いて、 a_2 を求めよ。
- (6) 円柱が A から斜面上に距離 L 離れた位置 B に接するまでにかかる移動時間を求めよ。