

# 強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ、第 60 回目は第 59 回目で紹介した『2015 年度 大阪大学 前期日程 (改題)』からの出題、「ラジオの受信の仕組み」に関する問題の解答解説 +α です。

## 【解答解説】

### 問 1

抵抗, コイル, コンデンサーを流れる電流の最大値をそれぞれ  $I_{R0}$ ,  $I_{L0}$ ,  $I_{C0}$  とする。オームの法則, 誘導リアクタンス, 容量リアクタンスおよび RLC 並列回路にかかる交流電圧の最大値  $V_2$  を用いて,

$$V_2 = RI_{R0}, \quad V_2 = \omega_1 LI_{L0}, \quad V_2 = \frac{1}{\omega_1 C} I_{C0}$$

となる。従って, それぞれの電流の最大値は

$$\text{抵抗} \quad : \quad I_{R0} = \frac{V_2}{R}$$

$$\text{コイル} \quad : \quad I_{L0} = \frac{V_2}{\omega_1 L}$$

$$\text{コンデンサー} : I_{C0} = \omega_1 C V_2$$

### 問 2

RLC 並列回路に流れ込む電流の最大値  $I_2$  と交流電圧の最大値  $V_2$  はインピーダンス  $Z$  を用いて,

$$V_2 = Z I_2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで, 問題文から並列回路部に流れ込む交流電流の最大値  $I_2$  は一定であるから,  $Z$  が最大のとき  $V_2$  が最大となる。このとき, 抵抗  $R$  (イヤホン) に流れる電流の最大値  $I_{R0}$  と  $V_2$  は比例するので, イヤホンに流れ込む電流が最大となることがわかる。

いま,  $Z$  が最大となるのは

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つときであるからこれを満たす  $\omega$  は

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} (= \omega_1)$$

となり, このときの  $Z$  は

$$Z = R$$

であるから,

$$V_2 = R I_2 \quad \therefore \quad I_2 = \frac{V_2}{R}$$

### 問 3

式②から

$$C = \frac{1}{\omega_1^2 L}$$

### 問 4

まず, 式①から,

$$\frac{V_2}{I_2} = Z$$

である。また,  $\omega = \omega_1$  において,  $Z = R$  となるので,  $\omega = \omega_2$  および  $\omega = \omega_3$  において,  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}} R$  となればよい。

従って,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} R = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\rightarrow \omega C - \frac{1}{\omega L} = \pm \frac{1}{R}$$

$$\rightarrow C R L \omega^2 \pm L \omega - R = 0$$

これを  $\omega$  について解くと

$$\omega = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 4C R^2 L}}{2C R L}, \quad \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4C R^2 L}}{2C R L}$$

となり,  $\omega_2 > \omega_3 > 0$  ゆえに,

$$\omega_2 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4C R^2 L}}{2C R L}$$

$$\omega_3 = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4C R^2 L}}{2C R L}$$

が得られる。

以上から, 半値幅  $\Delta\omega$  は

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_3 = \frac{1}{C R}$$

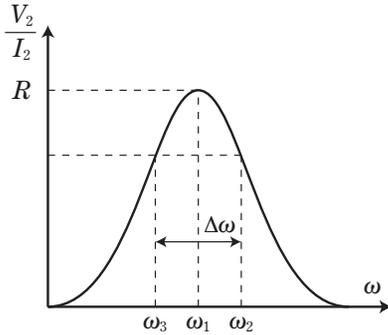
### 問 5

問 2 および問 4 の結果から  $Q$  値は

$$\frac{\omega_1}{\Delta\omega} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)}{\left(\frac{1}{C R}\right)} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

# 強者の戦略

問 6



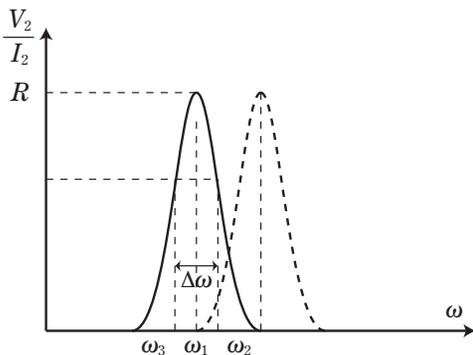
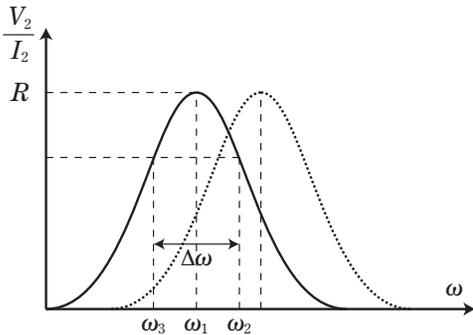
問 7

ラジオアンテナは複数の放送局から送信される電波を同時に受信する。角周波数  $\omega_1$  以外の電波を受信した場合のグラフを下図の点線のように示した。

下図上側のグラフ ( $\Delta\omega$  が比較的大) の場合は角周波数  $\omega_1$  の最大電圧がイヤホンにかかっている際に、他周波数の電圧もかかっており、混信している。

一方、下図下側のグラフ ( $\Delta\omega$  が比較的小) の場合は角周波数  $\omega_1$  の最大電圧がイヤホンにかかっている際に他方の周波数の電圧がほぼ 0 であり、混信を避けられている。

以上から、混信を避けるためには「 $\Delta\omega$  が小さい方がよい」ことが分かる。



<あとがき>

リアクタンスの特性について少し触れてみましょう。

まず、誘導リアクタンスは  $\omega L$  [ $\Omega$ ] で表され、 $\omega$  が大きいと大きく、 $\omega$  が小さいと小さくなります。

次に、容量リアクタンスは  $\frac{1}{\omega C}$  [ $\Omega$ ] で表され、 $\omega$  が大きいと小さく、 $\omega$  が小さいと大きくなります

つまり角周波数  $\omega$  が小さいときはコイルに多くの電流が流れ込み、角周波数  $\omega$  が大きいときにはコンデンサーに多くの電流が流れ込みます。

従って、②式  $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$  が成立する  $\omega_1$  では、

誘導リアクタンスと容量リアクタンスが等しいため、コイルにもコンデンサーにも同等に電流が流れにくくなります。結果、並列接続されている抵抗 (スピーカー) に流れ込む電流が最大となり、抵抗での電圧が最大となるのです。この  $\omega_1$  のことを共振周波数と言います。

さらに、 $Q$  値 (Quality Factor) の特性についても少し触れてみましょう。 $Q$  値が  $\Delta\omega$  に反比例し、かつ  $\Delta\omega$  が小さい方が混信を避けられることから、 $Q$  値が大きい方が混信を避けられることがわかります。

また、コンデンサーおよびコイルに蓄えられるエネルギーの和  $E_S$  について考えます。コンデンサーの電圧を  $V_C = V_2 \sin \omega t$  とすると、コイルに流れる電流は

$$I_L = \frac{V_2}{\omega L} \cos \omega t \text{ となるので } E_S \text{ は}$$

$$\begin{aligned} E_S &= \frac{1}{2} L I_L^2 + \frac{1}{2} C V_C^2 \\ &= \frac{1}{2} L \left( \frac{V_2}{\omega L} \cos \omega t \right)^2 + \frac{1}{2} C (V_2 \sin \omega t)^2 \end{aligned}$$

従って、 $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  にて  $E_S = \frac{1}{2} C V_2^2$  となります。

また、抵抗での 1 サイクルの消費電力  $E_d$  を考えると、

$$E_d = R I_e^2 \times \frac{1}{\omega} = \frac{V_2^2}{2R} \times \frac{1}{\omega} \quad (I_e: \text{電流実効値})$$

ゆえ、 $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  にて  $E_d = \frac{V_2^2}{2R} \sqrt{LC}$  となります。

ここで、 $E_S$  と  $E_d$  の比について考えると

$$\frac{E_S}{E_d} = \frac{\frac{1}{2} C V_2^2}{\frac{V_2^2}{2R} \sqrt{LC}} = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

が得られ、問 5 と同じ結果が得られます。つまり  $Q$  値が大きいということは「系に蓄えられるエネルギーが大きい」または「1 サイクルで失うエネルギーが少ない」ことも示すのです。 (終わり)