

強者の戦略

数学科の川崎です。夏が終わり秋の入り口といったところですね。夏の頑張りが結果に現れてくる時期です。そんなあなたに、今回は次の本格的な問題を出題します。少し難しいですが取り組んでみてください。

第1問 (数Ⅲ)

次の問いに答えよ。

- (1) a を定数とし、正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{x_n + n} - \sqrt{n}) = a$ を満たすとする。このとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2a$ が成り立つことを示せ。

- (2) 自然数 L, n に対して

$$\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ。

- (3) b は定数で、 $b > 1$ とする。自然数 n に対して、 $\sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < b$ を満たす自然数 L の個数を L_n とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。