強者の戦略

こんにちは．数学科の高木です．今春の名古屋大の問題は，無事解けたでしょうか．

それでは，ポイントを押さえながら解答を作成して行きましょう．まずは，問題の確認からです．

【問題】n を自然数とする．0 でない複素数からなる集合 M が次の条件（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ）を満たしている．
（Ⅰ）集合 M は n 個の要素からなる．
（Ⅱ）集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに M の要素である．
（Ⅲ）集合 M の要素 z，w に対して，その積 zw は集合 M の要素である．ただし，$z=w$ の場合も含める．
このとき，次の問に答えよ．
(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ．
(2) n は偶数であることを示せ．
(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．
(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

ポイント 1

（Ⅰ）と（Ⅲ）から，集合 M の要素である複素数 z の絶対値はすべて 1 であることが示せます．

（証明）

（Ⅰ）から集合 M の要素の個数は有限であることが分かります．よって，絶対値が最大の要素 z_M と最小の要素 z_m が存在します．

次に（Ⅲ）から，集合 M は乗法について閉じていることが分かります．よって z が M の要素なら，z^2 も M の要素となりますから，${z_M}^2$ および ${z_m}^2$ も M の要素となります．

ここで，$|z_M|>1$ と仮定すると，$|{z_M}^2|=|z_M|^2>|z_M|$ となり，z_M の最大性に矛盾します．同様に $|z_m|<1$ と仮定すると，$|{z_m}^2|=|z_m|^2<|z_m|$ となり，z_m の最小性に矛盾します．

よって，M の n 個ある要素の絶対値はすべて 1 であることが示せた．（証明終わり）

ポイント 2

（Ⅱ）から z が M の要素なら，$\dfrac{1}{z}$ も M の要素であるから，（Ⅲ）から $z\cdot\dfrac{1}{z}=1$ が M の要素となる．

また，1 が M の要素より，（Ⅱ）から -1 も M の要素である．← (1) が示せた．

ポイント 3

M の n 個ある要素の絶対値はすべて 1 より，z が M の要素なら，z は $|z|^2=z\overline{z}=1 \iff \overline{z}=\dfrac{1}{z}$ となり，（Ⅱ）から $-z$ も $\overline{z}$ および $-\overline{z}$ も M の要素となる．よって，複素数平面におい z と実軸，虚軸，および原点に関して対称な点も M の要素となる．

ポイント 2 と 3 を合わせると，M の要素の個数 n は偶数である．← (2) が示せた．

では，(3) と (4) に進みます．

ポイント 1 より，z は複素数平面における単位円上の点であり，ポイント 3 より，$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ としてよい．

次に（Ⅱ）から i が M の要素ならば，$-i$ も M の要素であるから，(1) と合わせて考えると，n は 4 の倍数となる．また，i が M の要素でないならば，$-i$ も M の要素ではなく，n は 4 で割ると 2 余る数である．

(3) $n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

n が 4 の倍数なので前者の場合であり，$n=4$ より，$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$ である．

(4) $n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ．

n が 4 で割ると 2 余る数なので後者の場合であり，$n=6$ より，$0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす z がただ 1 つ存在し，$-z$ も $\overline{z}$ および $-\overline{z}$ も M の要素であり，1，-1 も M の要素であることから，

$M=\{1,\ -1,\ z,\ -z,\ \overline{z},\ -\overline{z}\}$ である．

ここで，$0<\arg z^2<\pi$ かつ $z\neq 0,\ 1$ であるから，$z^2=-\overline{z}$ であることが分かり，

$z=\cos\theta+i\sin\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$z^2=-\overline{z}=-\dfrac{1}{z} \iff z^3=-1 \iff \cos 3\theta+i\sin 3\theta=-1$ より，

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ となり，$z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ である．よって，$M=\left\{\pm 1,\ \pm\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \pm\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}$ である．

【考察】問題の設定を変えて，条件（Ⅱ）を削除して（Ⅰ）と（Ⅲ）だけにしたらどうなるでしょうか．

0 が M に含まれないとき，M の要素で偏角が正で最小のものを z とすると，$z=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ となり，M の要素は 1 の n 乗根全体となります．また，0 が M に含まれるときは，M の要素は 1 の $n-1$ 乗根全体となります．各自，考えてみてください．