

強者の戦略

物理講師の内多です。

今回は静電気力に関する思考問題を作成してみました。導体に外部から電荷を近づけると、静電誘導により導体に電荷が誘起されるのですが、これらの電荷間に生じる静電気力を簡単なモデルで計算してみよう、という問題です。思考問題とは言っても誘導を丁寧につけていますので、その誘導にしっかりと乗ってモデルを理解すれば、あとは数学的にガシガシ解くだけです。さあ、ぜひチャレンジしてみてください。

(問題は次ページから)

強者の戦略

【問題】

以下の問題に答えよ。空欄には適する数値・文字式を入れよ。ただし、真空の誘電率を ϵ_0 とする。また、点電荷が作る電位の基準を無限遠としたとき、電気量 Q の点電荷が作る電位 V は、点電荷からの距離 r を用いて $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ となることを用いよ。

問1 図1のように、真空の3次元空間内に x 軸を取り、その原点 O に電気量 $+Q$ ($Q > 0$) の点電荷 A を置く。さらに $x = 2a$ の領域に別の点電荷 B を置く。この2つの点電荷が平面 $x = a$ に作る電位を求めよう。点電荷 B の電気量が点電荷 A と同じく $+Q$ であった場合、 $x = a$ での電位は である。また、点電荷 B の電気量が $-Q$ であった場合、 $x = a$ での電位は である。

問2 図2のように、真空の3次元空間内に x 軸を取り、その原点 O に電気量 $+Q$ ($Q > 0$) の点電荷を置く。さらに $x \geq a$ ($a > 0$) の領域に導体板を置く。 $x \geq a$ の領域はすべて導体板で満たされているものとする。また、導体板は接地し、その電位を 0 とする。

- (1) 導体板の電位が 0 であるので、平面 $x = a$ における電位はすべて等しく 0 である。このように、 $x = a$ において、その電位を 0 にするためには、問1を参考にすると、導体板を置く代わりに電気量 の点電荷を座標 $x =$ に置くことでも実現される。
- (2) (1) を参考にして、原点 O の点電荷が導体板から受ける静電気力を、 x 軸の正の向きを正として答えよ。

問3 問2のように、導体板表面の電位を 0 にする役割を果たす想像上の点電荷を、その性質から鏡像といい、このような鏡像を考える方法を鏡像法という。図3のように、真空の3次元空間内に x 軸を取り、今度は座標 x_1 ($0 < x_1 < a$) に電気量 $+Q$ ($Q > 0$) の点電荷を置く。さらに $x \geq a$ と $x \leq -a$ ($a > 0$) の領域に導体板 X, Y を置く。 $x \geq a$ と $x \leq -a$ の領域はすべて導体板で満たされているものとする。また、導体板は接地し、その電位を 0 とする。

- (1) 導体板による影響を、鏡像法によって考える。まずはじめに、 $x \geq a$ の導体板 X による影響を考えよう。 $x \geq a$ の導体板 X によって、電気量 の鏡像 (A_1 とする) が座標 $x =$ に現れると考えることができるが、この鏡像 A_1 が $x \leq -a$ の領域の導体板 Y に影響を及ぼす。 $x = -a$ における電位はすべて等しく 0 であるから、これを満たすために、電気量 の鏡像 (A_2 とする) が座標 $x =$ に現れると考えることができる。さらに、この鏡像 A_2 が $x \geq a$ の導体板 X に影響を及ぼす。同様に $x = a$ における電位はすべて等しく 0 であるから、これを満たすために、電気量 の鏡像 (A_3 とする) が座標 $x =$ に現れると考えることができる。このように、鏡像法によって次々と点電荷が現れていくと考えることができる。

次に、 $x \leq -a$ の導体板 Y による影響を考えよう。先述と同様に考えて、

1. 座標 x の点電荷の、 $x \leq -a$ の導体板 Y による鏡像 (B_1 とする) :

電気量 , 座標 $x =$

強者の戦略

2. 鏡像 B_1 の, $x \geq a$ の導体板 X による鏡像 (B_2 とする):

電気量 , 座標 $x =$

3. 鏡像 B_2 の, $x \leq -a$ の導体板 Y による鏡像 (B_3 とする):

電気量 , 座標 $x =$

...

といったように, やはり鏡像法によって次々と点電荷が現れていくと考えることができる。

(2) (1) を参考にして, 座標 x_1 の点電荷が導体板 X, Y から受ける静電気力の合力を, x 軸の正の向きを正として答えよ。ただし,

$$\frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2} \doteq 1 - \frac{2x}{a}, \quad \frac{1}{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2} \doteq 1 + \frac{2x}{a}, \quad \frac{1}{\left(1+\frac{x}{3a}\right)^2} \doteq 1 - \frac{2x}{3a} \quad \dots$$

などの近似を用い, また, 簡単のため,

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \dots \doteq 1$$

とせよ。

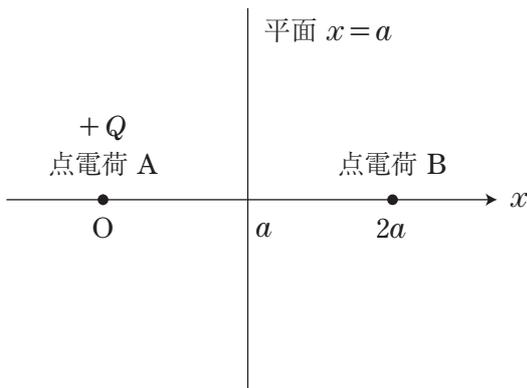


図 1

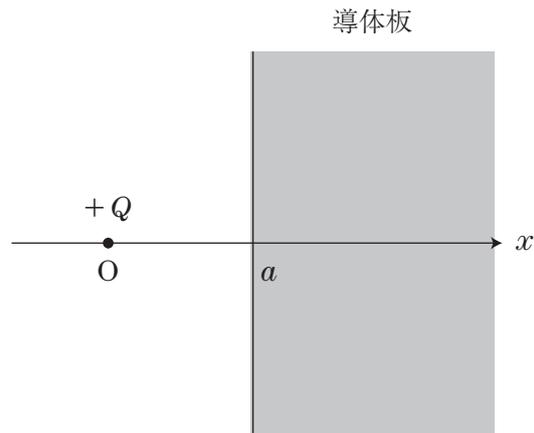


図 2

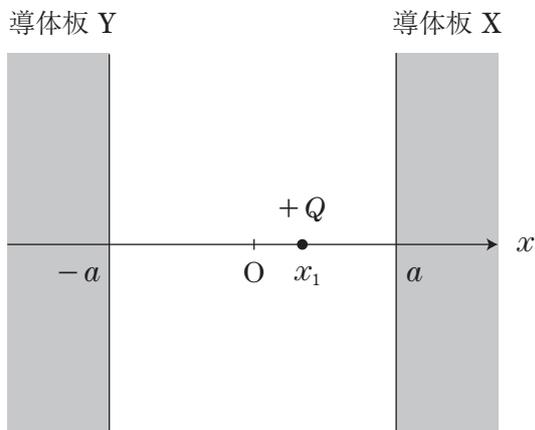


図 3