

強者の戦略

数学科の川崎です。新年明けましておめでとうございます。今回は数Ⅲの標準的な問題を出題します。受験生の方は、最後の確認に使ってください。

第1問 (数Ⅲ)

正の整数 n に対して、 $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ とする。

(1) 正の実数 x に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。