強者の戦略

それでは問題の確認です.

> **問題（数学 IAIIB）**
>
> 何人かで次のゲームを行うことにしました. 53 枚のカードのうち，1 枚だけ「あたり」と書かれたカードを用意します. このカードをよく混ぜて，1 つの山に重ねて置きます. 次に，参加者各自が 1〜6 の目が出る公平なサイコロを 1 回だけ投げ，カードを見ないようにして出た目の数だけ山の上から順にとっていきます. なお，一度とったカードは再度山にはもどさないこととします. このとき，手にしたカードの中に「あたり」のカードが入っていたら，そのカードをとった参加者を勝者と決定してゲームは終了します. また，いずれの参加者も「あたり」のカードをとることができなければ，このゲームは引き分けで終了するものとします.
>
> 参加者が 6 人のとき，このゲームが引き分けで終了する確率を求めなさい. ただし必要であれば，以下の内容が成り立つことを用いてもかまいません.
>
> 自然数 k $(6 \leqq k \leqq 36)$ に対し，1 以上 6 以下の 6 個の自然数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6 の集合 A_k を
>
> $$A_k = \left\{ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_6) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{6} x_i = k \right\}$$
>
> と定め，A_k の要素の個数を $n(A_k)$ としたとき
>
> $$n(A_k) = n(A_{42-k})$$
>
> が成り立つ.

以下の解説の中で (*1)〜(*4) と付けた箇所については，一番最後に補足の説明を載せていますので，必要に応じて参照してください.

≪考察 1≫

以下，≪考察≫内では k は $6 \leqq k \leqq 36$ をみたす自然数とします. まず，引き分けで終了するのは，6 人が取り出したカードの中に「あたり」のカードが入っていないときです. 6 人が取り出したカードの合計枚数が k 枚と決まれば，「あたり」のカードを引かない確率は 6 人が取らない $(53-k)$ 枚の中に「あたり」のカードが含まれる確率なので，53 枚のカードのうち「あたり」のカードがある場所については対等性があると考えて ……(*1)

$$\frac{53-k}{53}$$

となります. ただ，この問題では，k の値がどの値になるかの確率は k の値によって異なるので，ひとまずその確率を P_k とおいて，求めたい確率を立式してみましょう.

[解答 1]

6 人の参加者がサイコロを投げて出た目を順に

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6$$

とし，自然数 k $(6 \leqq k \leqq 36)$ に対し

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = k$$

となる確率を P_k とおく. このとき，ゲームが引き分けで終了するのは，「当たり」のカードが上から k 枚目までに入っていない場合なので，求める確率を P とおくと

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=6}^{36} P_k \cdot \frac{53-k}{53} \\ &= \sum_{k=6}^{36} P_k - \sum_{k=6}^{36} \frac{kP_k}{53} \\ &= 1 - \frac{1}{53} \sum_{k=6}^{36} kP_k \quad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

である. ……(*2)

≪考察 2≫

以下，≪考察≫内では［解答 1］の ① 式内にある

$$\sum_{k=6}^{36} kP_k$$

を S とします. S が求まれば，P が求まりますので，この値について考えてみましょう.

(i) $k = 6$ のとき

すべての目が 1 のときなので

$$P_6 = \frac{1}{6^6}$$

(ii)　$k=7$ のとき

6 人がサイコロを投げて出た目のうち，1 つだけ 2 で，他がすべて 1 のときなので

$$P_7 = {}_6C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^5$$

(iii)　$k=8$ のとき

$\vdots$

と P_k についてそれぞれの確率を具体的に求めようとすると，ものすごく大変なので，別の方法を考えたいところです．ここで，問題文で与えられたヒントである

$$n(A_k)=n(A_{42-k}) \quad \cdots\cdots (*3)$$

に注目しましょう．6 人分のサイコロの出た目の和が k のときと $42-k$ のときの場合の数が一致するということなので

$$\frac{n(A_k)}{6^6}=\frac{n(A_{42-k})}{6^6}$$

すなわち

$$P_k=P_{42-k}$$

が成り立ちます．これを用いて，P を別の形で表してみましょう．

［解答 2］（［解答 1］の続き）

ここで，問題文で与えられた

$$n(A_k)=n(A_{42-k})$$

より

$$P_k=P_{42-k}$$

であるから

$$P=\sum_{k=6}^{36}P_{42-k}\cdot\frac{53-k}{53}$$

と表せる．この式において，$j=42-k$ とおくと

$$\begin{aligned}P&=\sum_{j=6}^{36}P_j\cdot\frac{53-(42-j)}{53}\\&=\sum_{j=6}^{36}P_j\cdot\frac{11+j}{53}\\&=\frac{11}{53}\sum_{j=6}^{36}P_j+\frac{1}{53}\sum_{j=6}^{36}jP_j\\&=\frac{11}{53}+\frac{1}{53}\sum_{k=6}^{36}kP_k \qquad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

すなわち

$$\frac{1}{53}\sum_{k=6}^{36}kP_k=P-\frac{11}{53}$$

である．これを，① に代入して

$$P=1-\left(P-\frac{11}{53}\right)$$

$$\therefore \quad P=\frac{32}{53}$$

である．

≪考察 3≫

［解答 2］において

$$P=\sum_{k=6}^{36}P_{42-k}\cdot\frac{53-k}{53}$$

と表した後，$j=42-k$ と置き換えることで

$$S=\sum_{k=6}^{36}kP_k$$

の一部である P_k にあたる部分を作り出せます．さらに，置き換えた結果として，① 式の S の前の符号を $-$ から $+$ に変えたものが ② 式の中に現れるので，① 式と組み合わせることで S を消去して P を求めることができます（S の前の符号が変わっていない場合，解答と同じようにして ① 式に代入しても，P も消えてしまうので答えが求まりません）．最後の部分は S を消去できればよいので，① と ② を足し合わせてもよいでしょう．

≪考察 3≫（数学 B「統計的な推測」を用いた解法）

今回の問題のように

$$n(A_k)=n(A_{42-k})$$

のヒントが与えられていなかった場合，入試本番の限られた時間内で［解答 2］で用いたような工夫に気づくことはハードルが高いと思われます．ところが，数学 B「統計的な推測」で学ぶ「期待値」の考え方を用いると，S の値をもっとシンプルに求めることができます！

$$S=\sum_{k=6}^{36}kP_k$$

は，確率変数 k とその確率 P_k の総和なので，k の期待値になっています．また，確率変数 X，Y の和 $X+Y$ の期待値 $E(X+Y)$ に関する性質

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y) \quad \cdots\cdots (*4)$$

を用いると，確率変数の種類が X，Y，Z と 3 種類になっても

$$\begin{aligned} E(X+Y+Z) &= E((X+Y)+Z) \\ &= E(X+Y)+E(Z) \\ &= E(X)+E(Y)+E(Z) \end{aligned}$$

というようにして, 2 種類のときと同様に, X，Y，Z それぞれの期待値の和に分けることができます．同様の変形を繰り返し用いれば，確率変数の種類が 4 種類以上であっても，n を自然数として

$$\begin{aligned} &E(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n) \\ &=E(X_1)+E(X_2)+\cdots\cdots+E(X_n) \end{aligned}$$

というように，確率変数それぞれの期待値の和に分けることができます．ここまでの内容を踏まえると，簡単な計算で S を求めることができます．以下、その解法を紹介します．

【［解答 2］の別解】

$\displaystyle\sum_{k=6}^{36} kP_k$ は，6 人の参加者がサイコロを投げて出た目の和 $k=\displaystyle\sum_{i=1}^{6} X_i$ の期待値である．よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=6}^{36} kP_k &= E(X_1+X_2+X_3 \\ &\qquad +X_4+X_5+X_6) \\ &= E(X_1)+E(X_2)+E(X_3) \\ &\qquad +E(X_4)+E(X_5)+E(X_6) \\ &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\cdot 6 \\ &= 21 \end{aligned}$$

である．① に代入して，求める確率は

$$P=1-\frac{21}{53}=\frac{32}{53}$$

である．

≪最後に≫

数学 B の知識を用いることにより，S の値をサイコロを 1 個投げたときに出る目の期待値の 6 倍として，簡単に求めることができました．2025 年の 1 月に実施される共通テストからは「数学 IIBC」において解かなければならない選択問題が 1 題増えます．文系を目指す方で数学 C「平面上の曲線と複素数平面」の選択問題を選択しない場合は数学 B「統計的な推測」を勉強しないといけなくなり，今までの受験生よりも負担が増えると思います．ですが，学んだ知識を使いこなすことができれば，使える公式・解法が増えることになり，今回の問題のようにシンプルな解法を選択できたり，共通テスト本番で別解で解き直すことによる検算に活用できたりします．強者たらんとする皆さんは，単元の数が増えることに臆することなく，むしろ自分を強化するのにちょうどいいや！ ぐらいのつもりで臨むのが，ちょうどよいのではないでしょうか．

それでは，また次回．

（補足）

（$*1$）53 枚のカードをよく混ぜて 1 つの山に重ねて置いたとき，「あたり」のカードが上から m 番目（m は $1 \leqq m \leqq 53$ をみたす自然数）にある確率は，m の値によらず，（「あたり」以外の 52 枚のカードの並べ方の総数）／（53 枚のカードの並べ方の総数），すなわち

$$\frac{52!}{53!}=\frac{1}{53}$$

となるので，53 枚のカードのうち「あたり」のカードがある場所については対等性がある．

（$*2$）$\displaystyle\sum_{k=6}^{36} P_k$ は，6 人の参加者がサイコロを 1 回ずつ投げて出た目の和について，起こりうるすべての事象の確率の総和なので，1 になる．

（$*3$）この 2 つの集合の要素の個数が一致する理由については，以下のように説明できる．

1 以上 6 以下の自然数 x_i（$i=1,2,3,4,5,6$）に対し $7-x_i$ を対応させて，集合 A_k の要素

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad \cdots\cdots ③$$

に対し

$$(7-x_1\,,\,7-x_2\,,\,7-x_3\,,\\ 7-x_4\,,\,7-x_5\,,\,7-x_6) \quad \cdots\cdots ④$$

を対応させる．すると，$7-x_i$ の値は 1 以上 6 以下の自然数のいずれかであり

$$\sum_{i=1}^{6}(7-x_i)=42-\sum_{i=1}^{6}x_i=42-k$$

であるから，④ は集合 A_{42-k} の要素である．さらに，③ が異なれば ④ も必ず異なるものになる（6 回分のサイコロの出た目に対して，すべてそのサイコロの裏側の面の目を対応させる，と考えてもよい）．よって，2 つの集合の要素の個数は一致する，すなわち

$$n(A_k)=n(A_{42-k})$$

が成り立つ．

$(*4)$ 2 つの確率変数 X , Y の確率分布が，それぞれ以下の表で与えられているとする．

X	x_1	x_2	計
P	p_1	p_2	1

Y	y_1	y_2	計
P	q_1	q_2	1

さらに，$i=1$，2，$j=1$，2 に対し

$$P(X=x_i\,,\,Y=y_j)=p_{ij}$$

とすると，次のことが成り立つ．

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$$p_{11}+p_{12}=p_1\,,\;p_{21}+p_{22}=p_2$$
$$p_{11}+p_{21}=q_1\,,\;p_{12}+q_{22}=q_2$$

$X=x_i$, $Y=y_j$ のとき，$X+Y=x_i+y_j$ であり，その確率は p_{ij} であるから，$E(X+Y)$ は次のように計算される．

$$\begin{aligned}
&E(X+Y)\\
&=(x_1+y_1)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}\\
&\qquad+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22}\\
&=\{x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})\}\\
&\qquad+\{y_1(p_{11}+p_{21})+y_2(p_{12}+p_{22})\}\\
&=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1q_1+y_2q_2)\\
&=E(X)+E(Y)
\end{aligned}$$