数学集中講義

和と戯れる① $\sim \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ から見る和の世界～

吉田　信夫

大学への数学　09年8月号　掲載

平成20，21年のセンター試験数学ⅡB本試験での「数列」の問題は非常に興味深いものであった．この２題の内容をベースにして，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots\cdots+(n-1)2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}$$

に関して考えてみよう．通常，$S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ として，

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots\cdots+n\cdot 2^{n-1} \\ -)\ 2S= & \qquad 1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot 2^n \\ \hline -S= & 1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2^2+\cdots\cdots+1\cdot 2^{n-1}-n\cdot 2^n \\ = & \dfrac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^n \\ = & -(n-1)2^n-1 \end{array}$$

$$\therefore\quad S=\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=(n-1)2^n+1$$

と計算するが，次の技を知っている人もいるだろう：

$x\neq 1$ において

$$\sum_{k=1}^{n} x^k=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

であり，この両辺を x で微分すると，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot x^{k-1}=\frac{\{(n+1)x^n-1\}(x-1)-(x^{n+1}-x)}{(x-1)^2}=\frac{n\cdot x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

となる．$x=2$ として，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}=n\cdot 2^{n+1}-(n+1)2^n+1=(n-1)2^n+1$$

である．

さて，平成21年センター試験では，どのような出題だったか見てみよう．

$\{a_n\}$ を初項 a_1 が1で公比が $\dfrac{1}{3}$ の等比数列とする．数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項を取り出して，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{2n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots)$ で定める．

$T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$ とおく．

（1） $\{b_n\}$ も等比数列であり，その初項は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，公比は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．したがって

$$T_n=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\left(1-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}^{\,n}}\right)$$

である．また，積 $b_1b_2\cdots\cdots\cdots b_n$ を求めると

$$b_1b_2\cdots\cdots\cdots b_n=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}^{\,n^2}}$$

となる．

（2） 次に，数列 $\{c_n\}$ を $c_n=2n\cdot b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots)$ で定め，$U_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$ とおく．

$$\boxed{サ}\,c_{n+1}-c_n=\boxed{シ}\,b_n$$
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\cdots)$

が成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{サ}\,c_{k+1}-c_k\right)=\boxed{シ}\,T_n \quad\cdots\cdots\cdots\ ①$$

である．また，この左辺の和をまとめ直すと，U_n，c_{n+1}，c_1 を用いて

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{サ}\,c_{k+1}-c_k\right)=\boxed{ス}\,U_n+\boxed{セ}\,c_{n+1}-\boxed{ソ}\,c_1 \quad\cdots\cdots\cdots\ ②$$

と表される．

①と②より，

$$U_n=\frac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツテ}}-\frac{\boxed{トナ}\,n+\boxed{ニヌ}}{\boxed{ツテ}}\cdot\frac{1}{\boxed{ネ}^{\,n}}$$

となる．

※　解答は省略する．

センター試験の会場で(2)を見てとまどった人も多いのではないだろうか．ここでは，c_n を $n\cdot 2^{n-1}$ に変更し，そのエッセンスだけ抽出してみよう．

問題 1. すべての自然数 n に対して

$$A(n+1)2^n - n\cdot 2^{n-1} = B\cdot 2^{n-1}$$

となるような実数 A，B を求めよ．また，これを利用して $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を求めよ．

解 $n=1$，2 で成り立つから，

$$\begin{cases} 4A-1=B \\ 12A-4=2B \end{cases}$$

$$\iff \boldsymbol{A=\frac{1}{2},\ B=1}$$

が必要である．逆にこのとき，すべての n で

$$\frac{1}{2}(n+1)2^n - n\cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

が成り立ち，十分である．また，両辺の和：

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(k+1)2^k - k\cdot 2^{k-1}\right\} = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$

において，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k \\
&= 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots\cdots\cdots + n\cdot 2^{n-1} + (n+1)2^n \\
&= -1 + (1\cdot 1 + 2\cdot 2 + \cdots\cdots\cdots + n\cdot 2^{n-1}) + (n+1)2^n \\
&= \sum_{m=1}^{n} m\cdot 2^{m-1} + (n+1)2^n - 1
\end{aligned}$$

に注意すると，

$$(\text{右辺}) = \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1,$$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)2^k - \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{m=1}^{n} m\cdot 2^{m-1} + (n+1)2^n - 1\right\} - \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} + \frac{(n+1)2^n-1}{2}
\end{aligned}$$

より，

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} + \frac{(n+1)2^n-1}{2} = 2^n - 1$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} &= 2\left\{\frac{(n+1)2^n-1}{2} - (2^n-1)\right\} \\
&= (n+1)2^n - 1 - 2\cdot 2^n + 2 \\
&= \boldsymbol{(n-1)2^n + 1}
\end{aligned}$$

である．

*　　　　　　　*

$A=1$ であれば，“部分分数分解”

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots\cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

のような『差に分けて打ち消す』解法になる．この流れで $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を求めてみよう．

問題 2. $(n+1)2^n - n\cdot 2^{n-1}$ を計算し，$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を求めよ．

解

$$\begin{aligned}
(n+1)2^n - n\cdot 2^{n-1} &= n\cdot 2\cdot 2^{n-1} + 2^n - n\cdot 2^{n-1} \\
&= n\cdot 2^{n-1} + 2^n
\end{aligned}$$

$$\therefore\ n\cdot 2^{n-1} = \{(n+1)2^n - n\cdot 2^{n-1}\} - 2^n$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)2^k - k\cdot 2^{k-1}\} - \sum_{k=1}^{n} 2^k \\
&= (n+1)2^n - 1\cdot 2^0 - 2(2^n-1) \\
&= \boldsymbol{(n-1)2^n + 1}
\end{aligned}$$

である．

*　　　　　　　*

『差に分けて打ち消す』方法はエレガントである．“シグマの公式”を作るときにも用いることもある：

● $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$$\therefore\ n^2 = \frac{(n+1)^3 - n^3}{3} - \left(n + \frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^3 - k^3}{3} - \sum_{k=1}^{n}\left(k + \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{(n+1)^3 - 1^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{3} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

● $\dfrac{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)}{3} = n(n+1)$

$$\therefore\ n^2 = \frac{n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)}{3} - n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)}{3} - \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{n(n+1)(n+2) - 0\cdot 1\cdot 2}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

*　　　　　　　*

これを一般化して“シグマの公式”を作ると，

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + (\text{低次の項})$$

となる．これを題材にした問題はよく見かけるが，次に挙げる慶応大の問題はシンプルで面白い．

問題 3．p，q，r を自然数とし，$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$ とおく．

（1） $S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示せ．

（2） 極限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} S_p(n)$ が 0 でない有限の値となるような r を p で表し，そのときの極限値を p で表せ．

（3） すべての自然数 n に対して $S_p(n) = \{S_q(n)\}^2$ が成り立つための必要十分条件は，$p=3$ かつ $q=1$ であることを示せ．

解 （1） $n=1$ で成り立つ．また，ある自然数 n で

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

が成り立てば，

$$\begin{aligned} &S_3(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2\{n^2 + 4(n+1)\} \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \end{aligned}$$

が成り立つ．数学的帰納法により，題意は示された．

（2） 区分求積を用いると，

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} S_p(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p\,dx \\ &= \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

となるので，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} S_p(n) = \begin{cases} \infty & (r < p+1) \\ \dfrac{1}{p+1} & (r = p+1) \\ 0 & (r > p+1) \end{cases}$$

である．よって，求める条件は $\boldsymbol{r = p+1}$ であり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} S_p(n) = \boldsymbol{\frac{1}{p+1}}$$

である．

（3） （2）を用いる．$S_p(n) = \{S_q(n)\}^2$ が成り立つなら，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} S_p(n) = \begin{cases} \infty & (r < p+1) \\ \dfrac{1}{p+1} & (r = p+1), \\ 0 & (r > p+1) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} \{S_q(n)\}^2 = \begin{cases} \infty & (r < 2(q+1)) \\ \dfrac{1}{(q+1)^2} & (r = 2(q+1)) \\ 0 & (r > 2(q+1)) \end{cases}$$

において，0 でない実数値に収束する条件とそのときの極限値が一致するので，

$$p+1 = 2(q+1),\ \frac{1}{p+1} = \frac{1}{(q+1)^2}$$

$$\iff p=3,\ q=1$$

が成り立つことが必要である．

逆に，$p=3$，$q=1$ としたら，（1）より

$$S_3(n) = \{S_1(n)\}^2$$

が成り立ち，十分である．

以上で示された．

＊　　　＊

（2）から見える性質：

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + (\text{低次の項})$$

については，実は，

「一般項→和」≒「関数→原始関数」

というイメージである．直感的には，

$$\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1} \fallingdotseq n\cdot 2^{n-1}$$

と考えられるのである．さらに，

「和→一般項」≒「関数→導関数」

というイメージをもっていると，なお良い．

基本公式：

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと，

$$a_1 = S_1,\ a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geqq 2)$$

である．

この公式を使うとき，S_n の式に無理矢理 $n=0$ を代入して 0 になるときは，一般項 a_n が 1 つの式で書ける．そうでないときは，a_1 だけが別扱いになる：

$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の和がそれぞれ

$$S_n=n^2,\ T_n=n^2+1$$

であるとき，

$$a_n=2n-1\ (n\geqq 1)$$

$$b_1=2,\ b_n=2n-1\ (n\geqq 2)$$

である．

*　　　　　*

これを利用して，“逆算”の発想で $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を求めてみよう．

問題 4.（1）数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が

$$S_n=n\cdot 2^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすという．a_n を求めよ．

（2）（1）を利用して $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を求めよ．

解（1）

$$a_1=S_1=2$$

であり，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=n\cdot 2^n-(n-1)2^{n-1}\\&=(n+1)2^{n-1}\end{aligned}$$

である．これは $n=1$ でも成り立つので，

$$\boldsymbol{a_n=(n+1)2^{n-1}}$$

である．

（2）　$n\cdot 2^{n-1}=a_n-2^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}&=\sum_{k=1}^{n}(a_k-2^{k-1})=S_n-(2^n-1)\\&=\boldsymbol{(n-1)2^n+1}\end{aligned}$$

である．

*　　　　　*

この方法は，和の形が何となく分かれば使用可能である．“2 次関数を積分したら 3 次関数”であるから，こんなことにも応用できる：

$$S_n=n^3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad (\leftarrow S_0=0)$$

となる数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n=3n^2-3n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

であるから，

$$n^2=\frac{a_n}{3}+n-\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k^2&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3}+\sum_{k=1}^{n}\left(k-\frac{1}{3}\right)=\frac{S_n}{3}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

である．

*　　　　　*

最後は平成 20 年センター試験からの連想である．（1）と（2）のつながりをよく考えよう．

問題 5.（1）一般項が実数 a，b を用いて $a_n=an+b$ と表される数列 $\{a_n\}$ があり，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすという．a，b の値を求めよ．

（2）（1）を利用して $\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^{k-1}$ を求めよ．

解（1）

$$a(n+1)+b=\frac{1}{2}(an+b)+n\ (n\geqq 1)$$

において，両辺の係数を比較して，

$$a=\frac{1}{2}a+1,\ a+b=\frac{1}{2}b$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{a=2,\ b=-4}$$

である $(a_n=2n-4)$．

（2）（1）の数列 $\{a_n\}$ の一般項を別の形で表す．

$$a_1=-2,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+n\ (n\geqq 1)$$

$$\therefore\quad 2^0a_1=-2,\ 2^na_{n+1}=2^{n-1}a_n+n\cdot 2^n\ (n\geqq 1)$$

となる．$\{2^{n-1}a_n\}$ の階差数列が分かったので，

$$2^{n-1}a_n=-2+2\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 2^{k-1}\ (n\geqq 2)$$

$$\iff\ 2^na_{n+1}=-2+2\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}\ (n\geqq 1)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}&=\frac{2^na_{n+1}+2}{2}\\&=\boldsymbol{(n-1)2^n+1}\end{aligned}$$

である．

（よしだ　のぶお，予備校講師）