

強者の戦略

数学科の川崎です。今回は東京工業大学の過去問からの出題です。毎年かなりの計算量が要求されるこの大学ですが、例にもれずこの問題もかなりのボリュームになっています。(1)は有名問題なので一度は通る道。その先の(2)、(3)をいかに攻略するかです。(3)の評価にはうまく(1)を使ってください。

数学第10問 (Ⅲ C)

n を自然数とする。

(1) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

(2) 関数 $y = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき、

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \cdots + \frac{1}{n-x_n} \quad \text{および} \quad 0 < x_n \leq \frac{1}{2}$$

を示せ。

(3) (2) の x_n に対して、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \log n$ を求めよ。

【2002年 東京工業大学 前期 第4問】