

強者の戦略

数学科の川崎です。今回は 2009 度の京都大学の問題を出題します。私の方から整数問題を出すのは初めてですね。問題の設定としては非常に有名なのですが、そこに一ひねり入っているので、難易度は高くなっています。昨年度の強者たちを苦しめたであろう問題ですので、じっくり考えてみてください。

数学第 12 問 (I A II B)

a と b を互いに素、すなわち 1 以外の公約数を持たない正の整数とし、さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a+b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき、次の (1), (2) を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1) a_2 は奇数であり、 a_2 と b_2 は互いに素である。
- (2) すべての n に対して、 a_n は奇数であり、 a_n と b_n は互いに素である。

【2009 年 京都大学 前期 第 6 問】