

強者の戦略

第3回に引き続き、藤原です。第4回目は第3回目で紹介した、2005年度京大後期問題「ペットボトルの推進力」の解説を掲載したいと思います。各小問ごとに模範解答と〈考察〉を記載しました。〈考察〉では、より深い所まで踏み込んだ思考や、各問題で試されている物理的な能力などについて記述しています。物理学習を行う上での参考となれば幸いです。

【解答解説】

問1 ある瞬間のペットボトル、および内部の水の速度を V_0 とする（このとき、ペットボトルから見た水の相対速度は0である）。作用・反作用の法則より、微小時間 Δt において、ペットボトルの気体が、水に与える力は F （下向き）であるので、力積と運動量変化の関係式より、

$$F\Delta t = \Delta mu \quad \dots\dots (*)$$

Δt の間に、吹き出す水の質量は $\Delta m = \rho(Au\Delta t)$ であるので、これを (*) に代入して、

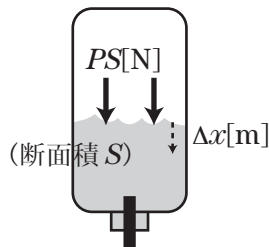
$$F\Delta t = \rho A \Delta t u^2 \quad u^2 = \frac{F}{\rho A} \text{ となる。さらにこれを}$$

文中に与えられた式、 $\frac{1}{2} \rho u^2 = P$ に代入すると、

$$\frac{F}{2A} = P \text{ となり題意通り、} F \text{ と } P \text{ は比例関係にある。}$$

〈考察〉

文中の与式は、エネルギーの原理から導きだせる。右図において、内部気体が面積 S の水面上を微小時間 Δt （断面積 S ）の間に微小距離 Δx 押ししたとする。この間に内部気体が



水にした仕事は $PS\Delta x$ である。また押しした部分の質量が Δm と等しい ($\Delta m = \rho S\Delta x$) ので、エネルギーの原理より

$$\frac{1}{2} \rho S \Delta x u^2 = PS\Delta x \quad \frac{1}{2} \rho u^2 = P \text{ となる。}$$

ペットボトルに働く推進力が水に与える力の反作用であること、微小時間における力と運動の関係式を立てることに目を向ければ、問われていることが「力積と運動量」であることに気づく強者は多いかと思われる。一方で、その式をそのまま与式に代入しても、 P と F の比例式とならない。与えられたエネルギーの式が、水の質量ではなく密度で表されていることから、この式の両辺に「吹き出す水の体積」かけることで、吹き出す水の質量 Δm についてのエネルギーの式になることを意識できるかどうかを試されている。

問2

吹き出す水が、回りから受ける外力は以下のようなものがある。

- 1, 重力。
- 2, 大気から受ける力。
- 3, ペットボトルの内壁から受ける力（動摩擦力）。
- 4, まだペットボトル内にある水から受ける力。

しかし水を含めたペットボトル全体の外部からの要因（外力）は省くと文中にあるので、上記の内、3, 4が当てはまる項目である。

〈考察〉

問1の(*)の式やエネルギーの式は、実際には F , P だけでなく上記の1~4の力や、ペットボトルから見た吹き出す水の運動なので、慣性力の影響を考えて立式するのが正しい。 F , P に対してそれ以外の力が十分に弱く、微小時間 Δt の間における、力積および仕事が無視できる、という事を前提として問1は出題されている。これに類する問題として、摩擦のある床上や空中での2物体の衝突問題があり、それらの問題では動摩擦力や重力は、2物体が与えあう撃力と比べ非常に小さいとすることで、衝突直前・直後で運動量がほぼ保存されると考える。

ある物体の運動（速度変化）の要因は、その物体が外部から受ける力である。物理における根本法則

強者の戦略

が定着していれば、論理的に具体例を上げられる問題である。

問3

$\frac{1}{2} \rho u^2 = P$ を $P_0 V_0 = PV$ に代入して P を消去すると、

$u = \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho V} \right)^{\frac{1}{2}}$ となる。これを $\frac{dV}{dt} = Au$ に代入して、

$$\frac{dV}{dt} = A \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho V} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow V^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{dt} = A \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \frac{dV^{\frac{3}{2}}}{dt} = A \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}}$$

両辺を積分して（積分定数を Z とする）

$$\frac{2}{3} V^{\frac{3}{2}} = A \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} t + Z$$

$$\Leftrightarrow V = \left\{ \frac{3A}{2} \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} t + \frac{3Z}{2} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

一方、問1の結果から、 $P_0 V_0 = PV$ を用いて P を消去すると $F = \frac{2AP_0 V_0}{V}$ となり、上記の式を代入して

$$F = 2AP_0 V_0 \left\{ \frac{3A}{2} \left(\frac{2P_0 V_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} t + \frac{3Z}{2} \right\}^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \left\{ \frac{3}{4P_0 V_0} (\rho A)^{\frac{1}{2}} t + (2AP_0 V_0)^{-\frac{3}{2}} \frac{3Z}{2} \right\}^{-\frac{2}{3}}$$

$$= (Bt + C)^{-\frac{2}{3}}$$

となり、題意を満たしている。

<考察>

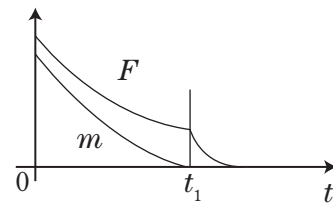
$\frac{dV}{dt} = Au$ において、 u は長い時間でみると、 V と同様に変数である。よって、 V は t の1次関数とはな

らない。 u を消去し、変数を V のみにした微分方程式を作り、 V が t のどのような関数となるかを導き出す、といった計算方針を考えつく解析力、またそれを正しく計算する計算力が試されている。

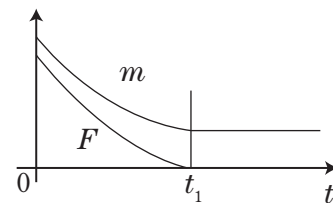
問4

(1) (a) は初めにおいて、水の質量が小さく、内部気体の圧力が大きかったときの結果。(b) は初めにおいて、水の質量が大きく、内部気体が小さかったときの結果。

(2)



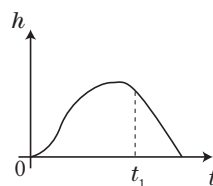
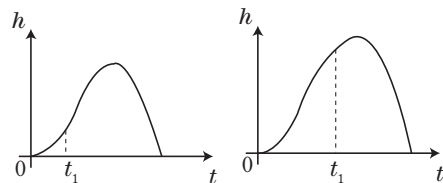
(a)



(b)

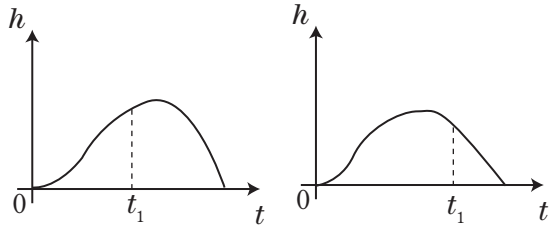
(3)

(a) 出発から F が重力より強い間は、上向きを正とした速度（グラフの傾き）は増加していく。 F が重力より弱くなった後は、速度は減少していき、やがて0となった後、負の速度を大きくしながら降下していく。しかし、どの時点で t_1 に達するかは解らないので、グラフは以下の3通りが考えられる。



強者の戦略

(b) 速度の変化の仕方は (a) と似ているが、 t_1 よりも早い時刻で減速が始まるのは明らかであるので、グラフは以下の2通りが考えられる。



<考察>

(2) の (a) は、水が無くなった後も、内部気体を吹き出すことによって生まれる、推進力 F がしばらく存在する。(a), (b) 共に内部気体の圧力が大気とほぼ等しくなった時点で $F=0$ になると思われる。

(3) のグラフを、正しく場合分けして描く事ができる強者は少ないと思われる。速度 (グラフの傾き) の変化に注目して、グラフを描く事ができるかが最も重要である。さらに細かく考察して、 m の減少にしたがい、重力が弱くなることまで考慮したものは、超強者 (または実験の経験者) といえる。

問5 霧は高圧・低温状態で発生する。初め最も高圧であったときに発生していなかった霧が、途中で発生したということは、内部気体の温度が低下した事を意味する。よって問3における式 $P_0V_0 = PV$ (ボイルの法則) は、等温変化のときに成立する式であるので、温度が低下するならば、変化後の圧力 P , V について、 $P_0V_0 > PV$ となるはずである。よって問3で求めた値より、実際の推進力は小さい。

<考察>

温度低下の原因は、断熱的な膨張によるものと考えられる (水にした仕事分、内部気体のエネルギーが減少したことによる温度低下)。

完全な断熱状態ならば、ポアッソンの法則 $P_0V_0^\gamma = PV^\gamma$ が成立し、この式を用いて問3の推進力を求め直す事ができる。ただ、この式がなくとも $P_0V_0 > PV$ であることは説明できるので、 F がより小さい

値であることは導かれる。

気体に関する問われている知識は基本的であるが、そこから問3の仮定のどこに不備があるかを見つけるのは、やや考察力を必要とする。

ボイルの法則の式の成立条件が定着しているかが重要である。

【おわりに】

今回の問題は、要約すると以下の3点の能力があるかを試していると思われます。

1. 各物理量について、どのような関係式 (物理法則や定義式) が成立しているかを、述べる事ができる、物理に対する本質的な理解力。
2. 導出した式や与えられたグラフから、状況を読み取る解析力。
3. 変数・定数の違いに注意して、正しい微積分計算や近似計算を行える計算力。

前期試験の問題と比べ、「何を答えていけばよいか」が読み取りにくい難問といえますが、枝葉の知識の有無ではなく、以上の3点を試しているという点では京大前期試験も全く同じ傾向があります。今後の学習や問題演習を進めていく際に、やみくもに問題に当たるだけでなく、上記の3点を丁寧に意識しながら、問題を読み解いていく練習を積んでいって下さい。