

強者の戦略

お久しぶりです。研伸館 物理科の米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ、第 5 回目・第 6 回目を担当させていただきます。強者を目指す皆さんへ、私からの課題は再び『東京大学 後期日程 総合科目Ⅱ』からの出題とさせていただきます。この問題は「交流電流」をテーマとしていますが、物理Ⅰの基本公式と数学の知識があれば解ける設問ばかりですので、『まだ交流なんて習ってない』という人でも大丈夫です。また、前回の「浮体静力学」と同じ様に、設問自体に非常に丁寧な誘導がありますので、文章さえ読めれば問題なく完答できるはずです。では、頑張ってください。

【問題】 n 相交流『出典：東京大学 後期日程 総合科目Ⅱ（改題）』（考察時間目安：30分）

次の文章の に適した数式を入れ、設問に答えよ。

一般家庭で利用される電気は二本の導線で送電される交流が用いられることが多いが、産業分野では三本の導線で送電される三相交流（正確には三相三線式であるが略して三相交流と呼ぶことにする）が用いられることが多い。ここでは一般化して n 本の導線（ただし、 $n \geq 2$ ）で電気を送る方式である n 相交流について考えてみる。

図 1 には n 相交流の電源から n 本の導線で電気を送り、全ての線に大きさ R の抵抗と自己インダクタンス L のコイルを接続し、一方の端子を全て点 N にまとめた場合の回路を示している。コイル間の相互インダクタンスは無視できるものとする。点 N を基準とし k 番目の線上の点 A_k の時刻 t における電位を $v_k(t)$ とする。電源から k 番目の線に流れる電流を $i_k(t)$ とし、電源から流れ出る方向を正とする。 $v_k(t)$ と $i_k(t)$ の間には の関係がある。

ここでは、電源として電流源（各導線ごとに任意の電流波形を出力する電源）を接続し、 k 番目の線に

$$i_k(t) = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{n}(k-1)\right) \quad (1 \leq k \leq n)$$

で与えられる電流 $i_k(t)$ を流すことにする。なお、 I は電流の実効値、 ω は角周波数を表す正の定数である。

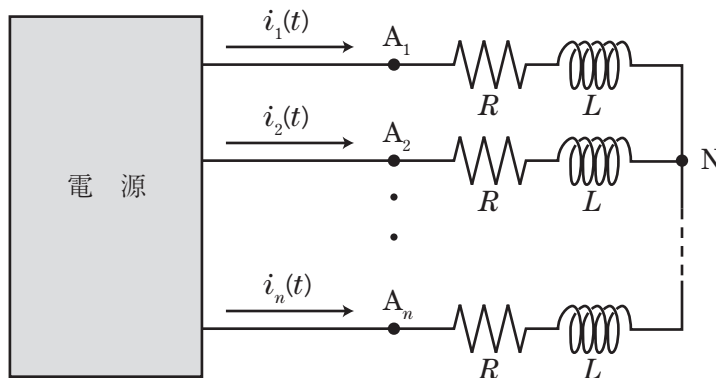


図 1

強者の戦略

[設問 1] 次の①式および②式は任意の実数 a , b に対して全ての自然数 k で成立する. 式①についてこのことを証明せよ.

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{j=0}^{k-1} \sin(a+bj) = \sin\left(a + \frac{k-1}{2}b\right) \sin\left(\frac{kb}{2}\right) \quad \dots\text{①}$$

$$\sin\left(\frac{b}{2}\right) \sum_{j=0}^{k-1} \cos(a+bj) = \cos\left(a + \frac{k-1}{2}b\right) \sin\left(\frac{kb}{2}\right) \quad \dots\text{②}$$

[設問 2] 点 N でキルヒホッフの電流則, すなわち $\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0$ が t に依存せず成立することを証明せよ.

[設問 3] k 番目の線の瞬時電力 (=消費電力: 単位時間あたりのジュール熱) $P_k(t)$ は 2 で定義される. これを全て足し合わせることで, n 相回路全体の瞬時電力 $P(t)$ を求めよ.

[設問 4] $P(t)$ の 1 周期の平均値 $\langle P \rangle$ を求めよ.