

強者の戦略

さて、第9回の解答編です。本問は非常に丁寧な誘導がなされていますが、その誘導にうまく乗れないと（すなわち、知の巨人たちとの対話がうまくできないと）かなり初期の段階で立ち往生してしまうと思われる。細心の注意を払いながら、この問題を解いてみましょう。

(1)

まず、解く前に、よく知られている2つの式を変形しておきましょう。

1. 状態方程式

理想気体の状態方程式は圧力を P 、体積を V 、物質量を n 、絶対温度を T として、

$$PV = nRT$$

です。また、気体の質量を w 、分子量を M として、モル数は、

$$n = \frac{w}{M}$$

となります。2式より n を消去して整理すると、

$$\frac{P}{\frac{w}{V}T} = \frac{R}{M}$$

となり、密度 $\rho = \frac{w}{V}$ を用いて、

$$\frac{P}{\rho T} = \frac{R}{M} = \text{const} \rightarrow \text{①}$$

という式が導かれます。これは非常に有名な式ですので、覚えていて損はないと思います。状態方程式（ボイル・シャルルの法則）を密度を用いて書き換えた形になっていますね。

2. ポアソンの法則

問題文中にも与えられているポアソンの法則の式は以下の通りです。

$$PV^\gamma = \text{const}$$

これを、両辺 γ 乗した状態方程式で割ると、

$$\frac{PV^\gamma}{P^\gamma V^\gamma} = \frac{\text{const}}{(nR)^\gamma T^\gamma} \quad \therefore \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \frac{\text{const}}{(nR)^\gamma}$$

ここで、物質量 n が一定であるとする、上式の右辺全体が定数となるので、

$$\therefore \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}} = \text{const} \rightarrow \text{②}$$

という式が導かれます。これはポアソンの法則を P と T で表した形となっています。

大学入試においてはもう一つ、 T と V で表した形 $TV^{\gamma-1} = \text{const}$ がよく用いられますので、3つセットで覚えておけばよいでしょう。

あ

1モル当たりの質量が w ですので、これが空気の分子量を表しています。よって、①の M を w として、地表において、

$$\frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{R}{w} \quad \therefore P_0 = \frac{\rho_0 R T_0}{w}$$

い う

問題文より、大気は断熱変化を繰り返して問題の状況にある、ということが読み取れます。ですので、大気に対して①だけでなく②も適用することができます。温度 T の高度における圧力を P 、密度を ρ とし、地表における大気とこの高度における大気を比較して、

$$\text{①} \rightarrow \frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{P}{\rho T}$$

$$\text{②} \rightarrow \frac{T_0^\gamma}{P_0^{\gamma-1}} = \frac{T^\gamma}{P^{\gamma-1}}$$

2式より、

$$P = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_0 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{\rho_0 R T_0}{w} \rightarrow \text{③}$$

$$\rho = \frac{P}{P_0} \frac{T_0}{T} \rho_0 = \frac{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_0}{P_0} \frac{T_0}{T} \rho_0 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0$$

→ ④

強者の戦略

(2)

(1) がクリアできたならば、ここは比較的容易に解けます。気球問題で頻出の「気球に関する力のつりあい」と①式、さらに比熱に関する知識を総動員します。なお、ここでは気球に詰める空気は熱せられているので、(1)の②式（ポアッソンの法則）は一切使用できません。

え

求める体積を V_1 、温度 T_1 の空気の密度を ρ_1 とします。この気体について①を適用すると、

$$\frac{P_0}{\rho_0 T_0} = \frac{P_0}{\rho_1 T_1} \quad \therefore \rho_1 = \frac{T_0}{T_1} \rho_0 \quad \rightarrow \quad \text{⑤}$$

浮かび始めた瞬間の気球の力のつりあいより、

$$Mg + \rho_1 V_1 g = \rho_0 V_1 g \quad \therefore V_1 = \frac{M}{\rho_0 - \rho_1}$$

2式から ρ_1 を消去して、

$$\therefore V_1 = \frac{M}{\rho_0 - \frac{T_0}{T_1} \rho_0} = \frac{MT_1}{\rho_0(T_1 - T_0)}$$

お

体積 V 、密度 ρ_1 の空気の質量は $\rho_1 V$ ですので、求める物質量を n_1 とすると、

$$\rho_1 V = n_1 w \quad \therefore n_1 = \frac{\rho_1 V}{w} = \frac{\rho_0 V T_0}{w T_1}$$

か

空気の加熱は一定圧力 P_0 のもとで行われたので、メイヤーの関係式より求まる定圧モル比熱 $C_V + R$ を用いて、気球に入った空気が得た熱量 Q は、

$$\begin{aligned} Q &= n_1 (C_V + R)(T_1 - T_0) \\ &= \frac{\rho_0 V T_0}{w T_1} (C_V + R)(T_1 - T_0) \end{aligned}$$

き

内部エネルギー変化を ΔU として、

$$\Delta U = n_1 C_V (T_1 - T_0) = \frac{\rho_0 V T_0}{w T_1} C_V (T_1 - T_0)$$

(3)

ここは細心の注意が必要です。各設問ごとの状況をよく把握する必要があります。

く

気球が静止した高度における大気の絶対温度を T 、密度を ρ とします。気球に関する力のつりあいより、

$$Mg + \rho_1 V g = \rho V g \quad \therefore M + \rho_1 V = \rho V$$

ここで、大気については④が適用できる！ので、⑤とともに代入すると、

$$M + \frac{T_0}{T_1} \rho_0 V = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0 V$$

$$\therefore T = \left(\frac{M}{\rho_0 V} + \frac{T_0}{T_1}\right)^{\gamma-1} T_0 \quad \rightarrow \quad \text{⑥}$$

け

気球下部を開く前の気球内部の空気は、温度が一定・体積が一定でかつ密閉されているので物質量も一定、です。よって、状態方程式から圧力も一定ですから、地表を出発したときの圧力 P_0 と同じです。

また、気球下部を開いた後も気球が静止し続けるので、気球内部の空気の密度は開く前後で変わってはなりません。すなわち、密度は ρ_1 のままなのです。

以上2点に気づいた上で、気球が静止した高度における大気の圧力を P 、開いた後の気球内部の空気の絶対温度を T' とします。気球内部の空気に関して①を適用すると、

$$\frac{P_0}{\rho_1 T_1} = \frac{P}{\rho_1 T'}$$

$$\therefore T' = \frac{P}{P_0} T_1 \quad \rightarrow \quad \text{⑦}$$

ここで、大気については③が適用できる！ので、上式に代入すると、

$$T' = \frac{\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} P_0}{P_0} T_1 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} T_1$$

強者の戦略

これに⑥を代入すると、

$$\therefore T' = \left(\frac{M}{\rho_0 V} + \frac{T_0}{T_1} \right)^\gamma T_1$$

こ

大気の圧力は高度が高くなれば小さくなります。よって、において $P < P_0$ であり、したがって⑦より $T' < T_1$ 、すなわち気球内部の空気の温度は T_1 より低くなります。

いかがでしたか？解答手順を追いかけてみると、本問を解くために使用した公式はそれほど多くはありませんし、また計算過程もさほどややこしいものではないことが感じてもらえたと思います。しかし、それでいてなんとも言い難い解きにくさを感じさせるのが京大物理の特徴です。はっきりと言いますと、解きにくいと感じる最大の要因は、問題文から問題状況を把握するために必要な「問題読解力」と「物理的思考力」が、恐ろしく高度なレベルで要求されているからなのです。今回の問題を通して、その一端を感じて頂き、今後の勉強の指針として頂ければ幸いです。