

強者の戦略

数学科の川崎です。早いもので、今年度私が担当する問題は今回が最後となりました。今年度は整数に焦点をあてて、「無限降下法」と言われる手法を用いて解く問題を主に扱ってきました。最後は中でも有名な「ペル方程式」の問題で締めたいと思います。是非挑戦してみてください。

第1問 (I A II B)

方程式

$$x^2 - 3y^2 = 1 \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

を満たす非負整数の組 (x, y) について考える。以下の設問に答えよ。

(1) $(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n \sqrt{3}$ ($n = 0, 1, 2, \dots\dots$)

によって、非負整数 x_n, y_n を定めるとき、 (x_n, y_n) は方程式 $\textcircled{1}$ を満たすことを示せ。

(2) 方程式 $\textcircled{1}$ を満たす自然数の組 (x, y) を一つとり

$$(x + y\sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = x' + y'\sqrt{3}$$

によって、整数 x', y' を定めるとき、 $x' > 0, y > y' \geq 0$ であり (x', y') は方程式 $\textcircled{1}$ を満たすことを示せ。

(3) 方程式 $\textcircled{1}$ を満たす非負整数の組 (x, y) は (1) の (x_n, y_n) ($n = 0, 1, 2, \dots\dots$) ですべてであることを示せ。