

強者の戦略

第11回の解答編です。本問を解くにあたり、光の粒子性を理解しておく必要があります。アインシュタインの光量子仮説より、振動数 ν の光は以下の式で表されるエネルギーと運動量を持つ粒子の性質を持つことが知られています。

$$\text{エネルギー} \quad : \quad E = h\nu$$

$$\text{運動量} \quad : \quad P = \frac{h\nu}{c}$$

c は光速、 h はプランク定数とよばれる定数です。すなわち、光は波動の性質だけを持つのではないのです。光だけでなく、波動現象と思われているもの（音波など）でも場合によっては粒子の性質が現れたり、粒子と思われているもの（電子など）でも場合によっては波動の性質が現れたりします。平たく言えば、世の中の様々なものは「粒子」と「波動」の両方の性質を持つわけで、現代物理ではそれを「量子」とよんでいます。大学に入って極微の世界の現象（原子や原子核など）を学ぶときには、この量子の発想が大変重要になりますから、楽しみに待っていてください。

さて、本問の宇宙ヨットですが、上記の「光の粒子性」が把握できれば、それが太陽光を浴びて運動する原理がイメージできるでしょう。宇宙ヨットの「セイル（帆）」が光の粒子を受け止め、その衝撃によって動く、ということです。よって計算過程は、衝撃の大きさを表す「力積」の計算から始まるわけです（熱力学の気体分子運動論と同じ流れですね）。では、解答を見ていきましょう。

あ

公式を使用すればよい。答えは $\frac{h\nu}{c}$ 。

い

1個の光子が鏡から受ける力積は、光子の運動量変化と等しい。これを I' として、

$$I' = \left(-\frac{h\nu}{c}\right) - \left(+\frac{h\nu}{c}\right) = -\frac{2h\nu}{c}$$

よって、鏡が1個の光子から受ける力積を I とすると、作用・反作用の関係より、

$$I = -I' = \frac{2h\nu}{c}$$

（厳密には、運動する鏡に反射する光はドップラー効果によりその波長および振動数が反射前後で変化するはずである。もちろん、問題文の通り、その影響は無視して解答していく）

う

n の定義より、時間 t に面積 S の鏡に入射する光子の個数は nSt である。鏡全体が光子から受ける力を f とすると、力積に注目して、

$$ft = I \times nSt \quad \therefore f = I \times nS = \frac{2h\nu nS}{c}$$

→ ①

え

太陽光のエネルギー L が半径 R の球の表面に広がっているので、求めるエネルギーは $\frac{L}{4\pi R^2}$

お

光子1個あたりのエネルギーが $h\nu$ と書けるので、エネルギー L 中の光子の個数は $\frac{L}{h\nu}$ となる。これが半径 R の球の表面に広がっているので、求める個数 n は、

$$n = \frac{\frac{L}{4\pi R^2}}{h\nu} = \frac{L}{4\pi R^2 h\nu} \quad \rightarrow \quad ②$$

か

①、②より、

$$f = \frac{2h\nu nS}{c} = \frac{2h\nu S}{c} \times \frac{L}{4\pi R^2 h\nu} = \frac{SL}{2\pi c R^2}$$

き

合力を F とする。万有引力は $-G \frac{Mm}{R^2}$ であるので、

強者の戦略

$$F = f + \left(-G \frac{Mm}{R^2}\right) = \frac{SL}{2\pi cR^2} - G \frac{Mm}{R^2}$$

く

$S = S_0$ のとき $F = 0$ として、

$$0 = \frac{S_0 L}{2\pi cR^2} - G \frac{Mm}{R^2} \rightarrow \textcircled{3}$$

$$\therefore S_0 = \frac{2\pi cGMm}{L}$$

け

③の結果は R によらない。よって、どの位置でも同じ S_0 の面積で静止させることができる。

こ

与えられた数値を代入して、

$$S_0 = \frac{2 \times 3.14 \times 3 \times 10^8 \times 7 \times 10^{11} \times 2 \times 10^{30} \times 1 \times 10^3}{4 \times 10^{26}}$$

$$= 65.94 \times 10^4$$

よって、正方形セイルの一边を l として、

$$l = \sqrt{S_0} \doteq 8 \times 10^2 \text{ [m]}$$

さ

光子から受ける力は、万有引力と同じく R の自乗に反比例する。また、その力は太陽から遠ざかる方向である。万有引力の位置エネルギーと比較して、そのエネルギーは $\frac{S_1 L}{2\pi cR}$ と書ける。

し

最終到達速度を v として、(光子から受ける力による位置エネルギーも考慮した) 力学的エネルギー保存より、

$$\frac{S_1 L}{2\pi cR} - G \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} mv^2$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{S_1 L - 2\pi cGMm}{\pi cmR}}$$

す

光を完全に吸収する場合は、光子が完全非弾性衝突することに相当する。このとき、与える力積は弾性衝突のときの半分になるので、光子が与える力お

よびエネルギーも半分になる。よって、宇宙ヨットに無限遠で同じだけの最終到達速度を持たせるためには、セイルの面積を2倍にする必要がある。

いかがでしたか？問題文の誘導に従い、原理さえ押さえてしまえば、さほど難しくない問題だったのではないのでしょうか？京大の入試は目新しい題材が出題されることが多いのですが、恐れることはありません。まずは物理の理論の確実に身につけておくことを目指してください。

さて、本問の **こ** において、宇宙ヨットを静止させるために必要なセイルの大きさを概算させています。一辺約 800 [m] と聞くと、「大きすぎて現実的には無理じゃない？」と誤ってしまいますね。実際、太陽光圧だけを動力源とするのは現実的ではありません。そこで、将来的には「太陽光圧 + 高性能イオンエンジン (太陽発電で得られる電力をエネルギー源としたイオンジェット噴射を行う装置)」といういわば「ハイブリッド」の形での運用が有力視されています。今回の「IKAROS」にはイオンエンジンは搭載されていませんが、後に続く実験機にはイオンエンジンが搭載される予定です。興味のある人は JAXA (宇宙航空研究開発機構) の HP などに詳細がありますので、参考に見てみてくださいね。