

強者の戦略

赤、青、黄、緑の4色の玉がそれぞれ十分多くある。この中から玉を1個ずつ選び、同じ色の玉同士が隣り合わないようにして合計13個の玉を円形に並べる。回転して重なるものは同じ並べ方であるとするとき、並べ方は全部で何通りあるか。ただし、使わない色の玉があってもよいとする。

《はじめに》

あれは、夏休みも終わり、9月になったばかりの某日。

大学のサークルの先輩が、ご自身の結婚式の際の動画をネット上にアップロードをしているようで、そちらを視聴しているとき、事件は起きました。

パソコンがフリーズ。

と言っても、4月頃からご機嫌斜めであった我がパソコンは、動画再生などの「重い」作業をする際、頻繁に同様のフリーズ（→強制終了）は起きていたわけですが、今回の場合、どうやら致命傷だったらしいようです。それ以降、起動は何とかするものの

起動後1分前後で、何もせずともフリーズ

という、恐ろしい状態に達してしまったのです。

（その先輩の動画にウィルスが…とかいうわけでは決してないです。念のため。）

よって、熟考を重ねた上で、ついにパソコンを新調！！

先日、無事私の手元に届き、色々な初期設定をしてようやく始動です。

いやはや、おニューのパソコンは素晴らしいです。

- ・ちゃんと起動する
- ・フリーズしない
- ・勝手に電源が落ちない

の3拍子揃った、何とも快適なマシーンです。

そんな環境の中での、記念すべき初原稿がこちらです。（前回の問題の方は、会社のパソコンにて作成。）

プレミアムな解答を以下、ご覧ください（笑）。

《考え方》

まず、最初の第1手は大丈夫でしょうか？

「特殊なただ1つの玉」があれば、それを固定して考えれば良いですが、今回の問題の設定の場合、どの玉を何個使うのかが不明瞭であるため、そのやり方では上手く行きません。ですので、前回の中西先生の問題同様

① 回転して重なるものも一旦区別する

② 後から重複度で割る

の流れで攻めることになります。

その際、重複度がどうなるかが最初の鍵です。今回は「13」という数字が要で、この数字は素数ですから、重複度は1または13以外にありません。

「重複度」の確認をしておく

ある1つの並べ方から、それを回転させることにより、何通りの異なる並べ方を生み出すことができるか

を考えれば良いんでしたよね。裏を返せば、回転している途中にそれまでと同じ並べ方が登場した場合は、そこから繰り返すことになるので、重複度としてはイレギュラーなものになったわけです。ですが、今回の場合、「13」は素数なので、回転の途中で同じ並べ方は登場せず、グルッと一回転して初めて重なることになるので

どの色を何回使うかに関わらず、重複度は必ず13、つまり13で割れば良い

となるわけです。

（全部が同じ色であることはないので、重複度が1ということはありません。）

逆に、「13」でなく「12」や「14」などの合成数の場合は、重複度がその都度まちまちになるので困難を極めることになります。

この問題の最初のハードルは、上記の通り、「13で割ればOK」であることに気付くかどうかです。

強者の戦略

ここから、後半戦です。

回転して重なるものも一旦区別することにしたので、これは単に横一列に並べるだけのお話です。この横一列に並べる場合の数を正しく求め、13で割れば答えです。

しかし、残念ながら、これが一筋縄ではいきません。以下のように間違えた考え方をした人はいませんか？

- 一番左の玉の選び方が4通り。
- その右隣は異なる色の玉より3通り。
- 以下、同様に3通りずつ。
- よって、 4×3^{12} 通り。

・最終的に円形にするのだから、最初に選ぶ左橋の玉と、最後に選ぶ右端の玉は同じ色ではダメですよね。じゃあ

$$4 \times 3^{11} \times 2 \text{ 通り}$$

かと言うとこれも間違いです。13個目を「☆」で表すとして、具体的に見せると

1 2 12 13
 赤青 黄 ☆
 赤青 赤 ☆

の、1番目と12番目の色が同じか否かの大きく分けて2ケースとがあって、上側の「☆」にこれるのは青緑の2通り、下側の「☆」には青黄緑の3通りです。

ですので、「×2」「×3」のどちらであるかは、その都度違います。じゃあ、12番目の玉が何色であるかで分けて…と考えると、それを考えるためには、11番目の玉の色が必要になり…というように、どんどん泥沼にはまっていきかねません。

では、どうすれば良いか？途方に暮れてしまうあなたに魔法の言葉：

直接求めるのが困難なときは、漸化式です。一旦 n にして考えます。文字に変えるのは並べる玉の数
 玉の色の数
 のどちらであるかは大丈夫ですか？

玉の色の数が、 n のときと $n+1$ のときとの関係だなんて、ちょっと考えづらいですよ。ここは素直に、並べる玉の数を n とします。先ほどの考察を踏まえると、最初と最後とで色が同じか異なるかで分けて考えます。 n 個の玉を、隣り合う玉同士の色が異なるように横一列に並べる場合の数の中で

a_n : 両端の色も異なる並べ方の総数

b_n : 両端の色は同じである並べ方の総数

として、 $a_n, a_{n+1}, b_n, b_{n+1}$ の関係を考えます。このとき、求めるものは $\frac{a_n}{13}$ です。

では、どんな漸化式が得られるでしょうか。

a_{n+1} を、 n 番目のもの、すなわち a_n と b_n とで表現することを考えます。両端の色も異なる n 個の並べ方において $n+1$ 番目の玉の選び方はそれぞれ2通りあり、両端の色が同じである n 個の並べ方において $n+1$ 番目の玉の選び方はそれぞれ3通りあるので

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \times 2 + b_n \times 3 \\ &= 2a_n + 3b_n \end{aligned}$$

が成り立ちます。(下の具体例参照)

1 2 n $n+1$
 a_n 通り: 赤青 黄 ☆ ← ☆には2通り
 b_n 通り: 赤青 赤 ☆ ← ☆には3通り

さらに、このままでは $\{a_n\}$ のみの漸化式ではないので、 b_n を消去することを考えます。そのために、 b_{n+1} についても、 n 番目のもの、すなわち a_n と b_n とで表現することを考えます。両端の色も異なる n 個の並べ方において $n+1$ 番目の玉の選び方はそれぞれ1通り(1番目と同じ色!)あり、両端の色が同じである n 個の並べ方からは作れないので

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_n \times 1 + b_n \times 0 \\ &= a_n \end{aligned}$$

が成り立ちます。(下の具体例参照)

1 2 n $n+1$
 a_n 通り: 赤青 黄 ☆ ← ☆には赤を(1通り)
 b_n 通り: 赤青 赤 ☆ ← ☆には赤は置けない

強者の戦略

したがって、 $n=2, 3, 4, \dots$ において

$b_n = a_{n-1}$ であるので、これより b_n を消去して

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$$

$$\therefore a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立ちます。これで、ほぼ勝利です。

ここから、特性方程式を用いた変形を行い一般項 a_n を求めた上で、 $n=13$ とします。

なお、 a_7 程度でしたら、 a_1, a_2 を求めた上で具体的に代入して順番に求めて行く方が楽かなとは思いますが。そのあたりの解法も、状況に応じて使い分けられるように！

最後に、1つ注意しておくことがあります。 a_1 の値は大丈夫ですか？1個並べるだけなんだから、色が同じだとか違うだとか関係なく、普通に $a_1 = 4$ では？…と考えてしまいそうですが、これは誤りです。

実際、 $a_1 = 4$ とすると、 $b_2 = a_1 = 4$ ですが、これはおかしいですよ。 b_2 とは、「隣り合う玉同士の色は異なるが、両端の色は同じである2個の並べ方の総数」を表しますが、こんなことは不可能です。つまり、正しくは $b_2 = 0$ のはず。これより、 $a_1 = 0$ と解釈せざるを得ません。

実は、先ほどの a_n の定義は少々曖昧で、「1個だけ並べるときの両端の玉の定義」が不明瞭なのです。 b_2 を考えることにより、正しい解釈として「1個のとき、『左端の玉』と『右端の玉』とは、それぞれ、同じその1つの玉を指すこととする。」ということになります。こう書けば、「両端が異なる色というのは不可能だから、 $a_1 = 0$ だな」と判断できますよね。

なお、先ほどの $b_{n+1} = a_n$ を導く際

$$1 \ 2 \ \dots \ n \ n+1$$

a_n 通り：赤青 \dots 黄 ☆ ← ☆には赤を (1通り)

としてますが、 $n=1$ とすると、赤と黄が重なってしまう、ありえないものを考えているということがわかるでしょう。

以上のことに気を付けて、以下、解答です。

《解答》

回転して重なるものも区別するときの n 個の玉の並べ方をまず考える。これは、両端の玉および隣り合う玉同士の色が異なるように横一列に並べるときの並べ方の総数である。

n 個の玉を横一列に並べるとき

a_n : 隣り合う玉同士の色が異なり、両端の色も異なるような並べ方の総数

b_n : 隣り合う玉同士の色が異なるが、両端の玉の色が同じであるような並べ方の総数

とする。ただし、1個のみ並べるときについては、左端および右端の玉は、ともにその1個のことを指すものとする。

このとき、 $n=1, 2, 3, \dots$ において、 a_{n+1}, b_{n+1} を、 n 番目のもの、すなわち a_n と b_n とで表すことを考える。

《 a_{n+1} について》

両端の色も異なる n 個の並べ方において $n+1$ 番目の玉の選び方はそれぞれ2通りあり、両端の色が同じである n 個の並べ方において $n+1$ 番目の選び方はそれぞれ3通りあるので

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。

《 b_{n+1} について》

両端の色も異なる n 個の並べ方において $n+1$ 番目の玉の選び方はそれぞれ1通りあり、両端の色が同じである n 個の並べ方からは作れないので

$$b_{n+1} = a_n \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。

このとき、 $\textcircled{1}$ より

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3b_{n+1}$$

であり、 $\textcircled{2}$ を代入して b_{n+1} を消去すると

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$$

が成り立つ。これを変形することにより

強者の戦略

$$\begin{cases} a_{n+2} + a_{n+1} = 3(a_{n+1} + a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = -(a_{n+1} - 3a_n) \end{cases}$$

を得る. $a_1 = 0, a_2 = 4 \times 3 = 12$ であることから

$$\begin{cases} a_{n+1} + a_n = (a_2 + a_1) \cdot 3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1) \cdot (-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} + a_n = 12 \cdot 3^{n-1} \\ a_{n+1} - 3a_n = 12 \cdot (-1)^{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 4 \cdot 3^n \\ a_{n+1} = 3a_n + 12 \cdot (-1)^{n-1} \end{cases}$$

となり, 2 式を連立して

$$\begin{aligned} -a_n + 4 \cdot 3^n &= 3a_n + 12 \cdot (-1)^{n-1} \\ \Leftrightarrow a_n &= 3^n - 3 \cdot (-1)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 3^n + 3 \cdot (-1)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

である.

これより

$$\begin{aligned} a_{13} &= 3^{13} + 3 \cdot (-1)^{13} \\ &= 1594320 \end{aligned}$$

である.

ここで, この場合の数は, 回転して重なるものも区別したときの数であるが, これは, 区別しないときにおける「1 通り」をそれぞれ「13 通り」と数えた結果である.

したがって, 求める場合の数は

$$\frac{1594320}{13} = 122640 \text{ (通り)} \dots\dots \text{ (答)}$$

である.

(解答終わり)

《コメント》

いかがだったでしょうか? なお, 玉の個数が 7 個程度でしたら, こんな回りくどい考え方をせず, 直接数える方が楽と感じる方も多いかと思います.

直接数える際は, それぞれの玉の使用回数で場合分けします. 7 個並べるときのこととして考えとしましょう. 例えば

$$(\text{赤}, \text{青}, \text{黄}, \text{緑}) = (3, 3, 1, 0)$$

という使用回数の場合, 1 個のみの特殊な「黄」を固定して, 隣り合うもの同士の色が異なるようにして並べると



の 2 通りのみを得られます. 色の入れ替えも考えると

1 回も使わない色の選び方 : 4 通り

1 回のみ使う色の選び方 : 3 通り

ゆえに

$$2 \times 4 \times 3 = 24 \text{ 通り}$$

となります. あとは

$$\begin{aligned} (\text{赤}, \text{青}, \text{黄}, \text{緑}) &= (3, 2, 2, 0) \\ &= (3, 2, 1, 1) \end{aligned}$$

のときも, ちょっと頭を使いますが, 求めることは十分可能です.

ちなみに, 元々は 7 個の出題の予定でしたが, 後から考えた際に, 「直接行けちゃうな」と思い至り, 「直接行くのはさすがに気が引ける」程度の個数, 13 に変更したわけです (笑).

また, 今回の場合, 「玉の個数が素数でないと大変」という旨の内容を最初に書きましたが, 実は「色の個数」の方については特に制約はなく, 一般に『 m 色』としても大したことはありません. 余力のある方は考えてみてください.

それでは, 今回はここまでです. では, また次回.

(研伸館数学科 野口)