

強者の戦略

それでは、前回の解答です。

第1問 (Ⅲ C)

(1) n を自然数とするとき、級数

$$1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}$$

を計算せよ。

(2) (1) を用いて、次式が成立することを示せ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

(解答)

(1) 与式は、初項1、公比 $(-x^2)$ の等比数列の和

であるから、 x が実数のとき $-x^2 \neq 1$ に注意して

$$\begin{aligned} & 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} \\ &= \frac{1 \cdot \{1 - (-x^2)^n\}}{1 - (-x^2)} \\ &= \frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1 + x^2} \end{aligned}$$

である。

(注) x を複素数の範囲で考える場合は

$$x = \pm i$$

のとき、 $-x^2 = 1$ なので、与えられた級数は

$$1 + 1 + \dots + 1 = n$$

となります。

(2) k を2以上の自然数とするとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-1)^{k-1} x^{2k-2} dx &= \left[(-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} \right]_0^1 \\ &= (-1)^{k-1} \frac{1}{2k-1} \end{aligned}$$

であるから、(1)より

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2}) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1 + x^2} dx \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

である。

ここで、 $x = \tan \theta$ と置換することで

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であるから、①は

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} dx \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} dx \right| \\ & \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} \right| dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \\ & \leq \int_0^1 x^{2n} dx \quad (\because 1+x^2 \geq 1) \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore 0 \leq \left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{1}{2n+1}$$

であり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ であるから、はさみうちの

原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} dx \right| &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{1+x^2} dx &= 0 \end{aligned}$$

である。よって、②より

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

である。□

<コメント>

数学科の川崎です。夏も終わりすっかり秋めいてきました。夏は自分の勉強ができたでしょうか？気をゆるめず、継続しましょう。地に足をつけて勉強

強者の戦略

すれば結果はおのずと出てくるはずですよ。

問題の方ですが、今回は有名な無限級数の計算を出題しました。ライプニッツの級数と呼ばれているものです。入試でも、誘導がかかった形式でよく見かけます。(1)の式を積分することで(2)の式が現れることが point です。是非マスターしてください。

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ の計算は大丈夫ですね。 } x = \tan\theta$$

と置換する典型的な形です。では、なぜこの置換でうまくいくかは理解できていますか？

$y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ に対して、逆関数の微分の公式から

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

が成り立ちます。すなわち、 $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$

の逆関数を $y = g(x)$ とすると

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = g(x) + C$$

です。ここで、 $x = \tan\theta$ とすると

$$g(\tan\theta) = \theta$$

となるので、積分がきれいに計算できます。

次に、前回の問題で解説したテーラー展開(マクローリン展開)との関係を見ましょう。上に出てきた $\tan x$ の逆関数 $g(x)$ を微分してみると

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$g^{(3)}(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$g^{(4)}(x) = \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

$$g^{(5)}(x) = \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}$$

なので

$$g'(0) = 1, g''(0) = 0, g^{(3)}(0) = -2,$$

$$g^{(4)}(0) = 0, g^{(5)}(0) = 24$$

となり、 $g(x)$ の $x=0$ でのマクローリン展開の最初の数項は

$$g(x)$$

$$= g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2$$

$$+ \frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \dots$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

となります。若さ溢れる皆さんは、もっと微分を続けていくと、解答中の①の積分区間を少し変えた

$$g(x)$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^x (1-t^2+t^4-\dots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}) dt$$

$$+ \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}t^{2n}}{1+t^2} dt$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$$

$$+ \int_0^x \frac{(-1)^{n-1}t^{2n}}{1+t^2} dt$$

が $g(x)$ の $x=0$ でのマクローリン展開になることが確認できると思います。

$$\int_0^x \frac{(-1)^{n-1}t^{2n}}{1+t^2} dt$$

が前回の解説に出てきた剰余項です。剰余項の表し方は色々なものが知られていますが、このように積分を用いたものもあります。

1つ注意です。(1)は有限和なのに、(2)は無限和なので、先に(1)の無限和版を考えて

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{1}{1+x^2} \quad \dots(*)$$

(初項1, 公比 $-x^2$ の無限等比級数)

とし、この両辺を積分するのは乱暴です。つまり何も考えずに

$$\int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad \dots(**)$$

強者の戦略

としてはいけません。まず、(*)は $|x| < 1$ でしか収束しないので(収束半径が1と言います) $0 \leq x \leq 1$ で積分するのは危険です。また、もう一つ問題があります。(**)の左辺は積分の中に無限級数が入っていて

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \right) dx$$

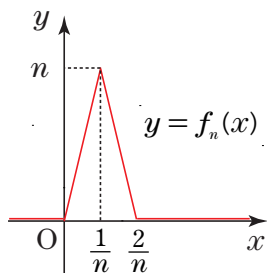
という形ですが、一般に

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と、積分とlimの順序を入れかえてはいけません。例えば以下の例を見てください。

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{n} \right) \\ -n^2 x + 2n & \left(\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \right) \\ 0 & \left(x \leq 0, \frac{2}{n} \leq x \right) \end{cases}$$

とします。



$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad \int_0^1 f_n(x) dx = 1$$

なので

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

となり、①は成り立ちません。というわけで、解答では部分和と $\frac{\pi}{4}$ との差を積分で表し、それが0に収束することを示すことで、与えられた無限級数が $\frac{\pi}{4}$ に収束することを示しています。積分評価で使った

計算テクニックは、よく使いますので自分のものにしてください。

さて、それでは、いきなり(**)から結論を導くという“乱暴”な議論をどうにか正当化できないでしょうか？実は結果的には正しいのですが、高校範囲の数学では議論できません。

無限級数

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots\dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (***)$$

を考えましょう。この級数の収束半径は1です。(*)の収束半径が1で、それを積分した(**)の収束半径もこれに等しくなります(一般に無限級数の収束半径を求めるには、ダランベールの判定法やコーシーの判定法などが知られていますが、長くなりますのでここでは割愛します)。すなわち $|x| < 1$ では収束が保証されます。ところが、今問題にしているのは $x=1$ のときです。収束円の周上の点に対して、収束するかどうか、さらに収束する場合にはその極限がどうなるかは非常にデリケートな問題で、以下のような定理を使わなくてはなりません。

<定理1>

交代級数 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots\dots$ において

$$a_n > a_{n+1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ならば、この級数は収束する。

<定理2> (アーベルの連続性定理)

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とする。 $x=r$ で

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ が収束すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n = \lim_{t \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (tr)^n$$

である。

強者の戦略

ここでは、定理1だけ証明を与えます（上に有界な単調増大列，下に有界な単調減少列はどちらも収束することを用います）。

定理2はアーベルの級数変形法という，見事な計算で示されます。大学で一様収束などを勉強してから，証明を考えてみてください。

<定理1>の証明

与えられた級数の第 n 部分和を S_n とする。 n が十分大のとき， $a_n > a_{n+1}$ より

$$S_2 < S_4 < S_6 < \cdots < S_{2n} \\ < S_{2n-1} < S_{2n-3} < S_{2n-5} < \cdots < S_1$$

が成り立つ。よって

$\{S_{2n}\}$ は上に有界な単調増大列

$\{S_{2n-1}\}$ は下に有界な単調減少列

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \beta$$

(α, β は有限確定値)

となる。さらに

$$S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$$

より

$$\alpha = \beta$$

であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \alpha$$

となり，与えられた無限級数は収束する。 \square

先ほどの無限級数 (***) は定理1の仮定をすべて満たすので，収束します。そして収束することが分かれば，定理2を用いて (**) の計算を正当化することができます。

今回お伝えしたかったのは，「無限は怖い」ということです。勝手なことをすると，正しくない“大理論”を打ち立ててしまうかもしれません。何が正しくて何が正しくないかを常に考えながら問題に取り組むようにしましょう。一見成り立ちそうなこと

でも，定理になっていなければ反例が作れる可能性が高いので，極端な例を考えてみるのが良いでしょう。あれこれと考えることが数学力を伸ばします。

それでは，今回はここまでにしましょう。次回もお楽しみに。

(数学科 川崎)