

強者の戦略

強者の皆さん、そして、強者にならんとしている意欲のある皆さん、こんにちは。数学科の中西です。

今回は、「答え自体はなんとなく思いつくけれど、相手に説明しようとするとなんか伝えにくい」というタイプの問題を選んでみました。(1)は、ある大学の入試問題(文章は少し変更していますが「考察の過程を丁寧に説明して解答せよ」は本文のまま)ですので、なるべく相手に伝わりやすい答案になるように気をつけながら、文章を作成してみてください。

それでは、問題です。

問題

「 n が5以上の奇数のとき、正 n 角形の対角線は、頂点以外では3つの対角線が1点で交わることはない」ということを証明なしに用いてよいものとする。以下の各問いに答えよ。

(1) 正五角形の頂点 A, B, C, D, E を結んだ5本の対角線を考えると、交点が5個できる。この5個の交点 P, Q, R, S, T の上に、表裏が定まったコインが置かれ固定されているとする。

今、表裏が定まっていて互いに区別のつかない5枚のコインを新たに用意し、5個の頂点上に1枚ずつ置く。すると、各対角線上には4枚のコインが並ぶことになる。このとき、どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような、5個の頂点へのコインの置き方の場合の数は何通りあるか。考察の過程を丁寧に説明して解答せよ。

(2) n を5以上の奇数とする。正 n 角形の頂点 A_1, A_2, \dots, A_n を結んだ対角線をすべて考え、正 n 角形の内部にできた交点すべてに表のコインを置き固定する。

今、表裏が定まっていて互いに区別のつかない n 枚のコインを新たに用意し、 n 個の頂点上に1枚ずつ置く。このとき、どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような、 n 個の頂点へのコインの置き方の場合の数は何通りあるか。考察の過程を丁寧に説明して解答せよ。

今回は、(1)と(2)で示すのが難しいポイントが異なるので、まずは自分が取り組みやすい方から考えてみてください。余裕のある強者の皆さんは、もう一方にもチャレンジしていただけるとよいと思います。

それでは、解答編でお会いしましょう。