

強者の戦略

研伸館 物理科の米田 誠です。強者の戦略HPの物理のページ、第20回目は第19回目で紹介した『東京医科歯科大学前期日程』からの出題、「ポアズイユの法則」の問題についての解答解説+αとしたいと思います。

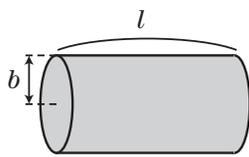
【解答解説】

問1 $F = \eta \cdot S \frac{dv}{dz} \rightarrow \eta = \frac{F}{S \frac{dv}{dz}} \dots (*)$

ここで、(*)を次元で表すと、

$$\frac{[MLT^{-2}]}{[L^2][LT^{-1}]} = [ML^{-1}T^{-1}]$$

問2



管内の水銀の質量 m について、左図から

$$m = (\pi b^2 \times l) \times \sigma$$

$$\therefore b = \sqrt{\frac{m}{\pi l \sigma}}$$

問3

① C_1 での圧力は C_2 での圧力よりも深さ h の水圧ぶんだけ大きくなるため、大気圧を P_0 として ΔP は

$$\Delta P = P_1 - P_2 = (P_0 + \rho gh) - P_0$$

$$\therefore \Delta P = \rho gh$$

② 円柱に働く力 F_1 は

$$F_1 = \Delta P \times \pi r^2 = \pi r^2 \rho gh$$

③ 式2を用いて

$$F_2 = \eta \cdot S \frac{dv}{dr} = \eta \cdot 2\pi r L \frac{dv}{dr} \quad (v: \text{右向き正})$$

問4

① 力のつり合い: $F_1 + F_2 = 0$ に問3の②, ③を代入して、

$$\pi r^2 \rho gh + \eta \cdot 2\pi r L \frac{dv}{dr} = 0$$

② ①から $\frac{dv}{dr} = -\frac{\rho gh}{2L\eta} r$

従って、 $r \rightarrow$ 大に伴い、 $v \rightarrow$ 小となることがわかる。ここで、 r について両辺を積分して

$$v(r) = -\frac{\rho gh}{2L\eta} \times \frac{r^2}{2} + C \quad (C: \text{積分定数})$$

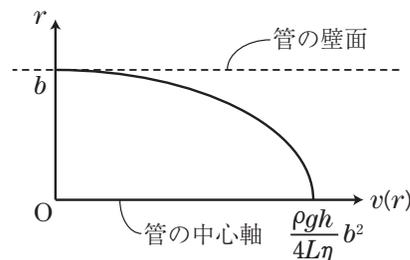
いま、「 $r=b$ のとき、 $v=0$ (境界条件という)」故に

$$0 = -\frac{\rho gh}{4L\eta} b^2 + C \quad \therefore C = \frac{\rho gh}{4L\eta} b^2$$

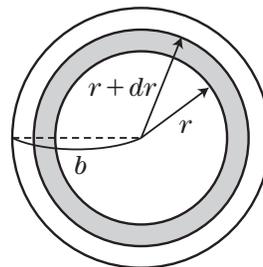
以上から、

$$v(r) = \frac{\rho gh}{4L\eta} (b^2 - r^2)$$

となり、グラフは以下の通りである。



③



dr が微小のとき、左図中網かけ部を流れる流体の速度を $v(r)$ とすると、 t 秒間に網かけ部を流れる水の体積 w は、

$$w = 2\pi r dr \times v(r)t$$

ここで、断面全体を流れる水の体積 V は w を $r=0$ から $r=b$ まで積分したものであるから、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^b w dr \\ &= \int_0^b 2\pi r v(r) t dr \\ &= \frac{\pi \rho g h t}{2L\eta} \int_0^b (b^2 r - r^3) dr \\ &= \frac{\pi \rho g h t}{2L\eta} \left[\frac{1}{2} b^2 r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^b \\ &= \frac{\pi \rho g h t}{8L\eta} b^4 \end{aligned}$$

強者の戦略

④ 問2から $b^4 = \left(\frac{m}{\pi l \sigma}\right)^2$ 故に、これを③の結果に
代入して

$$V = \frac{\pi \rho g h t}{8 L \eta} \left(\frac{m}{\pi l \sigma}\right)^2 \quad \therefore \quad \eta = \frac{\rho g h t m^2}{8 \pi L l^2 \sigma^2 V}$$

【考察】

今回は短めです。問3の③に示したように、

$$V = \frac{\pi \rho g h t}{8 L \eta} b^4$$

となり、流体の流量は半径 b の4乗に比例する、つまり、
管の半径が2倍になると流量が16倍になることがわかりました。

【おわりに】

第15回のベルヌーイの定理では「非粘性」「非圧縮」「密度一様」の完全流体を扱い、解説しました。これに対して今回のポアズイユの法則では「粘性」「非圧縮」「密度一様」の流体を扱いました。では、実際の流体はどうかといえば、「粘性を有し」「圧縮性を持つ」ことを皆さんも御存知のことでしょう。また、流体の密度も温度等によって、須く一樣になることは非常に珍しいと思います。では、第15回、第19回の議論は無駄だったのでしょうか。いえ、そうではありません。これらの議論に基づき、実験結果などから理論と実証の擦り合わせを行い、船舶の設計や航空機の設計を行っているのです。

皆さんが現在高校で学んでいる高校物理も「摩擦なし」や「空気抵抗なし」、それどころか「形状を持たない質点を扱う」など、設定に悩むこともあるかも知れませんが、それらの理論は将来的に実際の現象を数式で扱うための基礎体力となります。

前回も書きましたが、基本・根本理論が分かっているなければ実学を理解することも応用することも出来ません。まずは足下を固める学習を心がけて下さい。

また、『九州大学大学院 総合理工学府 大気海洋環境システム学専攻』のホームページ（下記アドレス）に流体力学の入門テキストが掲載されています。興味を持った人は持った人は是非覗いてみて下さい。

(<http://www.esst.kyushu-u.ac.jp/textbook/chap01.pdf>)