強者の戦略

第 21 回の解答編です。解いてみての感想はいかがですか？「計算が大変だった・・・」「途中の式変形で混乱したあ！！」といった感想が大勢を占めるのではないかなあ，と思います。実際, II の (1), (2) などは，小片放出後の 2 つの物理式の近似計算がなかなかに厄介で，これをうまく処理できなかった人は，「真夏の夜更けに考え始めたんだけど，気がついたら朝になっていた・・・」なんてことになりかねません。というわけで，解答に入る前に本問における近似計算の要の確認をしておきましょう。

【確認】

本問題では，「絶対値が 1 に比べて非常に小さい値について，その 2 次以上を無視して計算せよ」という指定があります。これはいわゆる 1 次の近似

$$(1+x)^n \fallingdotseq 1+nx \quad (|x|<<1)$$

を使用せよ，と言っているに他なりません。例題として, 絶対値が 1 よりも非常に小さい 3 つの数 x, y, z について，$(1+x)^a(1+y)^b(1+z)^c$ なる式を，1 次の近似を使用しつつ近似計算してみると，

$$\begin{aligned}
&(1+x)^a(1+y)^b(1+z)^c \\
&\fallingdotseq (1+ax)(1+by)(1+cz) \\
&=(1+ax+by+abxy)(1+cz) \\
&\fallingdotseq (1+ax+by)(1+cz) \\
&=1+ax+by+cz+acxz+bcyz \\
&\fallingdotseq 1+ax+by+cz
\end{aligned}$$

（xy，yz，xz は 2 次の微小量なので無視）

となります。上記の結果，よく確認しておいてください。本問の解答でも，何カ所かの近似計算で上式の形に変形して使用することにします。

では，実際の解答に移ります。

I.

球は弾性力 $k(l-l_0)$ を向心力とする半径 $\dfrac{l}{2}$ の円運動をしているので，中心方向の運動方程式より，

$$k(l-l_0)=m\times\frac{l}{2}\times\omega^2$$

$$\therefore\quad l-l_0=\frac{ml\omega^2}{2k}$$

II.

小片放出後，最終的に球は質量 $m-\Delta m$ で，弾性力 $k(l-l_0+\Delta l)$ を向心力とする半径 $\dfrac{l+\Delta l}{2}$ ・角速度 $\omega+\Delta\omega$ の円運動をしているので，中心方向の運動方程式より，

$$\begin{aligned}
&k(l-l_0+\Delta l)=(m-\Delta m)\times\frac{l+\Delta l}{2}\times(\omega+\Delta\omega)^2 \\
&\to k(l-l_0)+k\Delta l \\
&\qquad =\frac{ml\omega^2}{2}\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2
\end{aligned}$$

I. の結果と近似計算を用いて，

$$\begin{aligned}
&\to k\times\frac{ml\omega^2}{2k}+k\Delta l \\
&\qquad \fallingdotseq \frac{ml\omega^2}{2}\left(1-\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 2\frac{\Delta\omega}{\omega}+\left(1-\frac{2k}{m\omega^2}\right)\frac{\Delta l}{l}=\frac{\Delta m}{m} \quad\to\quad ①$$

また，球は，

1. まず小片放出によってその速さが変化（小片放出直後の速さは運動量保存より決定される）
2. 次に，円運動の速さが変化するのでその半径が変化
3. さらに，半径が変化する前後でばねの弾性エネルギーが変化するので球の速さ（角速度の大きさ）が変化（その角速度は系全体の力学的エネルギー保存から決定される」

という過程を経て新たな円運動状況に移行する。

まず，小片放出直後の球の速度を v_1 とする。小片の速度は（相対速度の大きさとして v をとらえ，$v>0$ として）v_1-v である。小片と球の運動量保存より，

$$m\times\frac{l}{2}\omega=(m-\Delta m)v_1+\Delta m\times(v_1-v)$$

$$\therefore \quad v_1=\frac{l\omega}{2}+v\frac{\Delta m}{m}$$

次に，この状態からばねの長さが Δl 変化して角速度が $\Delta\omega$ 変化するので，力学的エネルギー保存より，

$$\frac{1}{2}(m-\Delta m){v_1}^2\times 2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$
$$=\frac{1}{2}(m-\Delta m)\left\{\left(\frac{l+\Delta l}{2}\right)\times(\omega+\Delta\omega)\right\}^2\times 2$$
$$+\frac{1}{2}k(l-l_0+\Delta l)^2$$

$$\rightarrow \quad m\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(\frac{l\omega}{2}+v\frac{\Delta m}{m}\right)^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$
$$=\frac{1}{4}ml^2\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2\left(1+\frac{\Delta l}{l-l_0}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{4}ml^2\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{2v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m}\right)^2+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$
$$=\frac{1}{4}ml^2\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2\left(1+\frac{\Delta l}{l-l_0}\right)^2$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{4}ml^2\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}+\frac{4v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m}\right)+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$
$$\fallingdotseq\frac{1}{4}ml^2\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)$$
$$+\frac{1}{2}k(l-l_0)^2\left(1+2\frac{\Delta l}{l-l_0}\right)$$

$$\rightarrow \quad ml\omega v\frac{\Delta m}{m}$$
$$=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\frac{\Delta l}{l}+\frac{1}{2}ml^2\omega^2\frac{\Delta\omega}{\omega}+k(l-l_0)\Delta l$$

$$\rightarrow \quad ml\omega v\frac{\Delta m}{m}$$
$$=\frac{1}{2}ml^2\omega^2\frac{\Delta l}{l}+\frac{1}{2}ml^2\omega^2\frac{\Delta\omega}{\omega}+k\times\frac{ml\omega^2}{2k}\times\Delta l$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\omega}{\omega}+2\frac{\Delta l}{l}=\frac{2v}{l\omega}\frac{\Delta m}{m} \quad \rightarrow \quad ②$$

①，②を $\Delta\omega$，Δl について解くと，

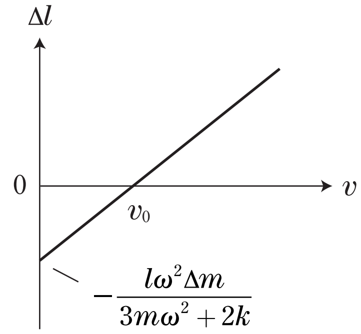
$$\Delta\omega=\frac{2(2k-m\omega^2)v+2ml\omega^3}{(3m\omega^2+2k)ml}\Delta m \quad \rightarrow \quad ③$$

$$\Delta l=\frac{4\omega v-l\omega^2}{3m\omega^2+2k}\Delta m \quad \rightarrow \quad ④$$

また，$\Delta l=0$ のとき $v=v_0$（臨界速度）であるので，④より，

$$0=\frac{4\omega v_0-l\omega^2}{3m\omega^2+2k}\Delta m \qquad \therefore \quad v_0=\frac{l\omega}{4}$$

④より，Δl と v の関係をグラフ化すると以下の通り。



さて，臨界速度前後で Δl の符号が変わるが，これは，以下のように簡単に説明できる。すなわち，

「単に小片を切り離す（相対速度 $v=0$ で放出）場合，球の質量が減少するだけなので，円運動の中心方向の運動方程式よりばねの弾性力は小さくてよいのでばねが縮む（$\Delta l<0$）が，放出の相対速度を大きくしていくと，球の円運動の角速度が増加するので，円運動に必要な弾性力は大きくなる必要があり，ばねの長さは長くなる。その結果,臨界速度を境によって，ばねは縮みから伸び $\Delta l>0$ へと変化する」

III.

臨界速度のときの角速度の変化量は，③より，

$$\Delta\omega=\frac{2(2k-m\omega^2)\times\dfrac{l\omega}{4}+2ml\omega^3}{(3m\omega^2+2k)ml}\Delta m$$
$$=\frac{\omega\Delta m}{2m}=\frac{\omega}{2}\frac{\Delta m}{m}$$

これを用いて，臨界速度で小片を放出した後の球の運動エネルギーを計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(m-\Delta m)\left\{\frac{l}{2}\times(\omega+\Delta\omega)\right\}^2\\
&\quad=\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}\right)\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2\\
&\quad\fallingdotseq\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)\\
&\quad=\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)\omega^2\left(1-\frac{\Delta m}{m}+2\frac{\frac{\omega}{2}\frac{\Delta m}{m}}{\omega}\right)\\
&\quad=\frac{1}{2}m\left(\frac{l}{2}\right)\omega^2
\end{aligned}
$$

となり，確かに放出前の運動エネルギーと一致していることが示された。

以上が解答です。
さて，最後に・・・私が大学生のときにこの問題に挑戦したときの所要時間ですが・・・実は確か１時間くらいかかったような気がします。結局近似計算に手間取ったわけですね。はい，もしこれが本番の入試だったら，あまりよくない結果だったかも知れません。さて，みなさまはどうでしたか？