

強者の戦略

数学科の川崎です。今回は微分の問題を出題します。少し意地悪なので「あること」に気づかないと解きにくいかもしれません。夏に向けて、微分の考え方をしっかり押さえましょう。

第1問 (III C)

$x > 0$ において関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \log \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{2}(x-1)^2 - x^2 \log x$$

で定める。

- (1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ。
- (2) $f(x) \geq 0$ を示せ。
- (3) 正の実数 p, q について、不等式

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p-q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。