

強者の戦略

数学科の川崎です。今年度も引き続きこのページ（主に数Ⅲ）を担当させていただくことになりました。1年間どうぞよろしくお祈いします。

さて、新年度一発目ということで、極限の問題からいきましょう。(1)はカラクリが分かると思わずニンマリしてしまう問題です。(2)が勝負です。原題から「ある言葉」を削除しましたので難易度が上がっています。強者を目指す皆さんは、そんな意地悪に音を上げることなく、積極的に取り組んでください。

第1問 (数Ⅲ)

実数 x および自然数 n に対して

$$a_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$$

とする。以下の問いに答えよ。

- (1) x の値を決めると、 $2^n a_n \sin \frac{x}{2^n}$ の値は、 n と無関係に一定であることを証明せよ。
- (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{\pi}$ を証明せよ。

※ (2) は (1) を使わなくても解けます。差の形を作るには？余裕のある人は考えてみてください。