

強者の戦略

数学科の竹本です。9月から高2 数学Sのクラスのみなさんは積分の学習が始まっていると思います。今回はテキストには載っていないけど、入試にはよく出題される定積分の評価について考えていきたいと思います。すでに学習を終えている人は完答しましょう！

数学第1問 (III)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} d\theta, \quad b_n = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} e^{n \sin \theta} \cos \theta d\theta \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) 一般項 b_n を求めよ。

(2) すべての n について、 $b_n \leq a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}} b_n$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(na_n)$ を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。