

強者の戦略

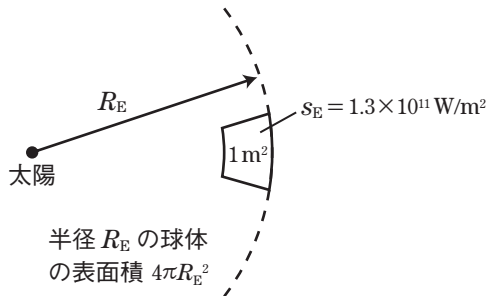
研伸館 物理科の米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ、第 48 回目は第 47 回目で紹介した『2014 年度 お茶の水女子大学 前期日程』からの出題、「シュテファン・ボルツマンの法則」に関する問題の解答解説 +α です。

【解答解説】

本問題では第 47 回の紹介文でも示したように『高校物理で学ぶ基礎知識に基づいて問題文の指示を満足する解答を捻り出す力』が問われています（(4) は天体に関する特別な知識が必要）。問題文の表現を如何にイメージして整理できるかが鍵となります。

(1)

『問題文：太陽からのエネルギーは、地球の位置 $R_E = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$ において単位時間単位面積当たり $s_E = 1.3 \times 10^{11} \text{ W/m}^2$ である（太陽定数）』なる記述を下図のように捉え、太陽からのエネルギーは、均等に放射状に宇宙空間に広がるとして、太陽の単位時間当たりのエネルギー放出量 W_{sun} を考えると、



$$W_{\text{sun}} = s_E \times 4\pi R_E^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

また、一般に太陽から距離 R の位置での単位時間単位面積あたりの太陽のエネルギー量を s として W_{sun} を考えると

$$W_{\text{sun}} = s \times 4\pi R^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

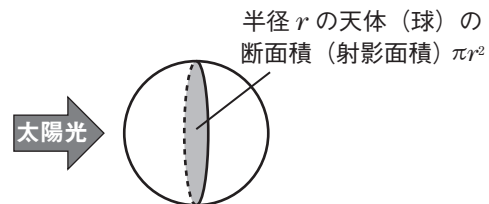
以上、①、②から

$$s = \left(\frac{R_E}{R}\right)^2 s_E$$

が得られる。

一方、任意の半径 r の惑星（球体とする）において太陽から受け取る（入ってくる）単位時間当たりのエ

ネルギー W_{in} は下の図から、 $W_{\text{in}} = s \times \pi r^2$ で表される。



また、この惑星から放出される（逃げていく）単位時間当たりのエネルギー W_{out} は『問題文：その惑星の表面積に比例し、その比例係数 f は温度 T に依存するだろう』に従い、 $W_{\text{out}} = f(T) \times 4\pi r^2$ で表される。

ここで、『問題文：惑星は太陽によって暖められ、そのエネルギーはやがて宇宙空間に逃げていく。このバランスによって、その惑星の平均表面温度が決まる』から、 $W_{\text{in}} = W_{\text{out}}$ と考えて、

$$s \times \pi r^2 = f(T) \times 4\pi r^2$$

$$\therefore 4f(T) = \left(\frac{R_E}{R}\right)^2 s_E \quad \dots \textcircled{3}$$

また、問題文中で与えられた式について

$$T = 1.3 \times 10^8 R^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow R = \left(\frac{1.3 \times 10^8}{T}\right)^2$$

として、③に代入すると

$$4f(T) = \left\{ \frac{R_E}{\left(\frac{1.3 \times 10^8}{T}\right)^2} \right\}^2 s_E$$

$$\rightarrow f(T) = \frac{1}{4} R_E^2 s_E \left(\frac{T}{1.3 \times 10^8}\right)^4$$

(2)

(1) で用いた太陽のエネルギー放出量 W_{sun} について題意から、 $W_{\text{sun}} = f(T) \times 4\pi r_{\text{sun}}^2$ であり、これと①から

$$s_E \times 4\pi R_E^2 = \frac{1}{4} R_E^2 s_E \left(\frac{T}{1.3 \times 10^8}\right)^4 \times 4\pi r_{\text{sun}}^2$$

$$\rightarrow 1 = \frac{1}{4} \left(\frac{T}{1.3 \times 10^8}\right)^4 \times (7.0 \times 10^8)^2$$

$$\rightarrow T = 1.3 \times 10^8 \sqrt[4]{\frac{2}{7.0 \times 10^8}} \doteq 7 \times 10^3 \text{ K}$$

強者の戦略

(3)

$W_{\text{out}} = f(T) \times 4\pi r^2$ に、問題文から $W_{\text{out}} = 100 \text{ W}$ と $2r = 10 \times 10^{-2} \text{ m}$ を代入して、

$$100 = \frac{1}{4} R_E^2 s_E \left(\frac{T}{1.3 \times 10^8} \right)^4 \times \pi (1.0 \times 10^{-2})^2$$
$$\rightarrow \frac{1}{4} (1.5 \times 10^{11})^2 \cdot (1.3 \times 10^{11}) \left(\frac{T}{1.3 \times 10^8} \right)^4 \times 3.14 \times 10^{-4}$$
$$\therefore T \doteq 6 \times 10^2 \text{ K}$$

(4)

(i) 金星の大気は二酸化炭素が主成分である。この膨大な量の二酸化炭素の温室効果によって金星の表面温度が直線から大きく外れて高くなっているものと考えられる。

(ii) (1) では雲や地表による太陽光の反射を考えていない。また大気による温室効果を考えていないことが気になる。(2) では「熱平衡」を1つの物体系について用いているが、高校物理では一般的に「熱平衡」は2物体系について扱うので、今回も「熱平衡」ではなく、別の用語「熱力学的平衡」や「定常状態」という表現を用いた方が良いと思われる。(3) 白熱電球と太陽系惑星を同一モデルで扱うのは無理があると思われる。また、アルミ箔がおよそ 600K になる状況が腑に落ちない。図のデータについては火星の大気も二酸化炭素が主成分であるのにも関わらず、直線からのずれ方が金星と大きく異なるのが気になる。また、火星の直線からのずれ方が、大気のほぼ無い水星や窒素が主成分の大気を持つ地球と同様のずれ方になっているのも気になる。

【おわりに】

「シュテファン・ボルツマンの法則」という、黒体放射（黒体：あらゆる波長の電磁波を吸収する物質）に関する法則が今回の出題のベースにある。具体的には、『黒体の表面から放射されるエネルギーフラックス（単位面積・単位時間あたりに放出される電磁波のエネルギー） I がその黒体の絶対温度 T の4乗に比例する』という法則であり、ヨーゼフ・シュテファンが実験的に明らかにし、その後、弟子のボルツマンが理論的な証明を与えたものである。ちなみに表式は

$I = \sigma T^4$ (σ : シュテファン・ボルツマン定数)
である。

最難関大では本問題のように、高校物理（の教科書）では学ばないテーマについて出題されることがしばしばある。しかし、そういった問題の多くは、似たような流れの公式の導出を高校物理（の教科書）で学んだり（今回の内容はガウスの法則に類似）、誘導が丁寧で、誘導にきちんと乗ることができれば（(4) 以外は）完答できるであろう。逆にどこかで見たとあるような問題は状況設定が捻られていたり、計算が非常に煩雑になったりと解きにくい場合が多い。入試本番では、今までに見たことも聞いたこともない問題を見たときに「満点のチャンス」と思って取りかかれるよう、日常から『読解』を意識して学習に取り組もう。