数学集中講義

1+2+4+8+……=-1 を実現する特別な「距離」

吉田　信夫

大学への数学　16 年 1 月号　掲載

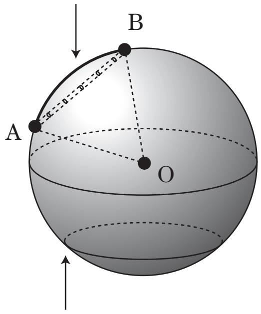
仰々しいタイトルであるが，まず，「距離」について考察しよう．距離とは，2 点をつなぐ最短経路 (線分) の長さであり，2 点が $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ であれば，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

が距離である．これはユークリッド幾何学での距離であって，実は，これだけが距離というわけではない．

例えば，球面上での距離は，2 点を球面上で結ぶ最短経路の長さであり，それは 2 点を結ぶ「大円の弧」になることが知られている (地球上の 2 点を結ぶ最短経路は，トンネルを掘って，線分でつないだものであるが，地表上しか移動できないことにすると，大円が最短になる)．ここで，「大円」とは「球の中心を通る平面で球を切ったときに得られる円」のことである．球面上の 2 点 A，B を通る大円は，平面 OAB と球の交わりとして得られる．ただし，A，B が球の直径の両端 (例えば北極と南極) であれば，3 点 O，A，B は同一直線上にあり，平面 OAB は定まらない．このときは，3 点を含むどんな平面で切って得られる大円の弧 (経線) でも等長である．

球面上だけを移動するときの最短経路

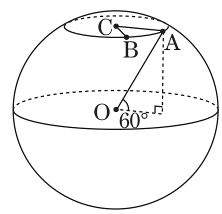


赤道以外の緯線は，最短経路ではない！

この事実を実感できる問題がある．2008 年の京都大の問題である．

> **問題** 1．地球上の北緯 60° 東経 135° の地点を A，北緯 60° 東経 75° の地点を B とする．A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1，R_2 を考える．R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする．R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする．R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3 %以上短くなることを示せ．ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする．また必要があれば，三角関数表 (省略) を用いよ．

解　半径は 1 として良い．また，地軸のまわりに回転して，A，B の東経を 60°，0° としても同じ結果になる．

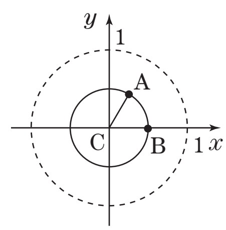


経路 R_1，R_2 の飛行距離をそれぞれ l_1，l_2 とする．また，地球の中心を O とし，北緯 60° の円の中心を C とする．

北緯 60° の円の半径は $\dfrac{1}{2}$ であり，$\angle\mathrm{ACB}=60°$ より，

$$l_1=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{60}{360}=\frac{\pi}{6}$$

である．



$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とすると，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であるから，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{7}{8}=0.875$$

である．$\cos 28.5°=0.8788$，$\cos 29°=0.8704$ より

$$28.5°<\angle\mathrm{AOB}<29°$$

なので，

$$l_2=2\pi\cdot\frac{\angle\mathrm{AOB}}{360°}<\frac{29}{180}\pi$$

である．

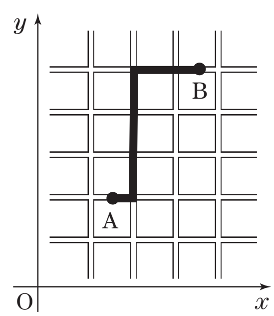
以上から，

$$\frac{l_2}{l_1}<\frac{29}{30}<\frac{291}{300}=\frac{97}{100}$$

となり，題意は示された．

＊　　　　＊

距離を測りたい対象によっては，ユークリッド的距離では考えられないときもある．他には，「マンハッタン距離」と呼ばれるものがある．アメリカのニューヨークにあるマンハッタン島は，京都のように「碁盤の目」状の街並みである．縦横方向の



み移動できるとして，マンハッタンでの最短経路とはどんなものになるだろうか？

2 点 A，B を結ぶ最短経路は図のようになる．2 点が $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ であれば，A，B 間のマンハッタン距離は

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$

となる．

この距離は次のような形で現れる：

『原点 O からのマンハッタン距離が 1 である点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ．』と言われたら…

$$|x|+|y|=1$$

ということなので，

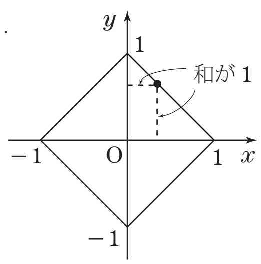
・$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$x+y=1$

・$x<0$，$y \geqq 0$ のとき，$-x+y=1$

・$x<0$，$y<0$ のとき，$-x-y=1$

・$x \geqq 0$，$y<0$ のとき，$x-y=1$

となり，図示すると右の通り．



マンハッタン距離での「単位円」が正方形になったのである！

マンハッタン距離を空間でも考えることができる．空間で原点からのマンハッタン距離が 1 である点の存在範囲は，

$$|x|+|y|+|z|=1$$

という方程式で表され，これは正八面体である．

この距離を利用してキレイな図を描かせる問題がある．2013 年の大阪大の問題である．

> **問題** 2.　不等式
>
> $$1 \leqq \Big||x|-2\Big|+\Big||y|-2\Big| \leqq 3$$
>
> の表す領域を xy 平面上に図示せよ．

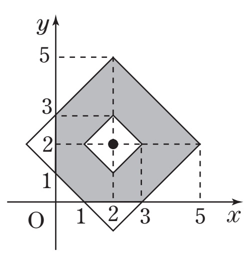
解　考える領域は x 軸，y 軸，原点について対称になるので，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分を考えれば，全体のことも分かる．このとき，

$$1 \leqq |x-2|+|y-2| \leqq 3$$

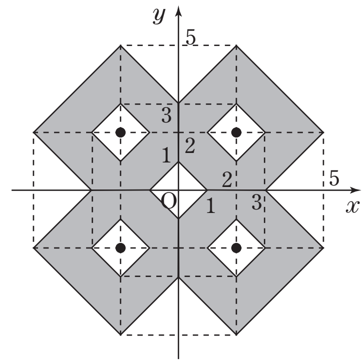
である．これは，

$$1 \leqq |x|+|y| \leqq 3$$

を x 方向，y 方向とも 2 だけ平行移動して得られる図形なので，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に注意して図示すると右のようになる．



これを対称移動して貼り合わせることで，考えるべき領域は次のようになる．



＊　　　　　＊

面白い図を描くことができた！

ここまで見てきたように，「距離」というものにも色々あることが分かる．ここまでは図形的に考えられる距離であるが，距離の概念を拡大解釈し，図形的意味から離れて抽象的に距離を考えることもある．

集合 X の 2 つの要素 a，b に対する，X における a，b 間の距離 $d(a,\ b)$ というものを考えよう．

ユークリッド距離では，平面内の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ に対し，

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

である．

球面上の距離では，球面上の 2 点 A，B に対し，

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(\text{A，B をつなぐ大円の弧の長さ})$$

である．

また，マンハッタン距離では，平面内の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ に対し，

$$d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$

である．

抽象的には，集合 X の 2 つの要素 a，b に対して $d(a,\ b)$ という実数値を定義する関数で，

1)　$d(a,\ b) \geqq 0$

2)　$d(a,\ b)=0$ となるのは，$a=b$ のときであり，かつ，そのときに限る

3)　$d(b,\ a)=d(a,\ b)$

4)　$d(a,\ b)+d(b,\ c) \geqq d(a,\ c)$

を満たすものが「距離」である．ここで，4) は「三角不等式」である．

ここまでの例では，すべて上記が成り立っていることは容易に確認できる．

次に，かなり特殊な距離を紹介しよう．図形的な距離でなく，上記を満たす関数としての「距離」である．

整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ で距離を定義するのである．何でも良いので好きな素数 p をとる．ここでは，簡単のために $p=2$ としておこう．

2 つの異なる整数 a, b について，

$$a-b=A\cdot 2^n \ (A \text{ は奇数，} n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

となる A, n が存在する ($a-b$ が 2 でちょうど n 回割り切れる)．このとき，

$$d(a,\ b)=2^{-n}$$

と定める．$a=b$ のときは

$$d(a,\ b)=0$$

と定める (0 は 2 で何回でも割り切れるので，$n=\infty$ と考えよ).

例えば，$a=49$, $b=25$ としたら，

$$a-b=24=3\cdot 2^3 \quad \therefore \quad d(a,\ b)=2^{-3}$$

である．

$$b-a=-3\cdot 2^3 \quad \therefore \quad d(b,\ a)=2^{-3}$$

であることから分かるように，3) は成り立つ．

1) の $d(a,\ b)\geqq 0$ は明らかで，2) を満たしていることも容易に分かる．

では，4) はどうだろうか？これも満たしていれば，晴れて $\mathbb{Z}$ での距離として認定される．

a, b, c を整数とする．同じものがあれば 4) は明らかに成り立つ．ゆえに，すべて異なるとして，

$$a-b=A\cdot 2^l,\ b-c=B\cdot 2^m,\ a-c=C\cdot 2^n$$

とおく．ただし，A, B, C は奇数で，l, m, n は 0 以上の整数である．

前 2 つの両辺を足すと

$$a-c=A\cdot 2^l+B\cdot 2^m$$

となる．

$l>m$ とすると，

$$a-c=(A\cdot 2^{l-m}+B)2^m$$

となり，$A\cdot 2^{l-m}+B$ は奇数なので，

$$d(a,\ c)=2^{-m}=d(b,\ c)$$

である．

$l<m$ のときは $d(a,\ c)=d(a,\ b)$ である．

$l=m$ のときは，

$$a-c=(A+B)2^l$$

で，$A+B$ は偶数であるから，$n\geqq l+1$ となり，

$$d(a,\ c)=2^{-n}\leqq 2^{-l-1}<d(a,\ b)$$

である．

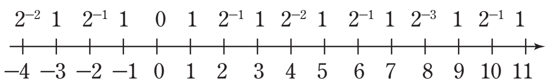
よって，いずれの場合も

$$d(a,\ b)+d(b,\ c)\geqq d(a,\ c)$$

が成り立ち，4) も満たす．

よって，この $d(a,\ b)$ は $\mathbb{Z}$ での「距離」となる．

差が 2 で何回割り切れるか，その回数が多いほど a と b の距離は近いのである．a, b の偶奇が不一致のときに距離は最も遠く，$d(a,\ b)=1$ である．



【0からの距離】

実は，この距離は p 進法 (いまは 2 進法) と密接な関係がある．先ほどの $a=49$, $b=25$ を 2 進表記すると

$$a=110001,\ b=11001$$

となるのだが，$a-b$ で $\underline{n=3}$ となったのは，2 進表記で下 3 桁が一致しているからである．つまり，

$$a=32+16+0+0+0+1,$$
$$b=16+8+0+0+1$$

なので，差をとると 8 の倍数だが，16 の倍数でない．このとき，a, b の距離を

$$d(a,\ b)=\frac{1}{8}$$

としたのである．

*　　　　　　*

これをテーマにした入試問題が存在する．2015 年の信州大の医学部 (後期) の問題である．

問題 3. p を素数とする．自然数 m を，p で割り切れない整数 a と整数 $n\geqq 0$ を用いて

$$m=ap^n$$

と表すとき，$f_p(m)=p^{-n}$ と定める．

（1）自然数 k, l に対し，

$$f_p(kl)=f_p(k)f_p(l)$$

であることを証明せよ．

（2）自然数 k, l に対し，

$$f_p(k+l)\leqq \max\{f_p(k),\ f_p(l)\}$$

であることを証明せよ．ただし，実数 a, b に対して $\max\{a,\ b\}$ は a, b のうち小さくない方を表す．

（3）$S_n=\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$ とおく．$\lim_{n\to\infty} f_2(S_n+k)=0$ となる自然数 k をすべて求めよ．

解（1）$k=ap^m$, $l=bp^n$

とおく．ただし，a, b は p で割り切れない整数で，m, n は 0 以上の整数である．すると，

$$f_p(k)=p^{-m},\ f_p(l)=p^{-n}$$
$$kl=abp^{m+n}$$

である．p は素数なので，ab は p で割り切れず，

$$f_p(kl)=p^{-(m+n)}=f_p(k)f_p(l)$$

である．以上で示された．

（2）（1）と同じおき方をする．

$m<n$ のとき，$\max\{f_p(k),\ f_p(l)\}=f_p(k)$ で，

$$k+l=(a+bp^{n-m})p^m$$

である．$a+bp^{n-m}$ が p で割り切れないので，

$$f_p(k+l)=p^{-m}=\max\{f_p(k),\ f_p(l)\}$$

より，成り立つ．

$m>n$ のときも同様に成り立つ．

$m=n$ のとき，

$$k+l=(a+b)p^m$$

である．$a+b$ が p の倍数でないなら，

$$f_p(k+l)=p^{-m}=\max\{f_p(k),\ f_p(l)\}$$

が成り立つ．$a+b$ が p の倍数なら，

$$f_p(k+l)\leqq p^{-(m+1)}<\max\{f_p(k),\ f_p(l)\}$$

が成り立つ．

以上で示された．

（3）　$S_n=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

である．

$k=1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}f_2(S_n+1)=\lim_{n\to\infty}f_2(2^n)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}=0$$

である．

$k>1$ のとき，

$$k-1=a\cdot 2^m \ (a \text{ は奇数で，} m \text{ は 0 以上の整数})$$

とおく．すると，十分大きい n に対し，

$$S_n+k=2^n+a\cdot 2^m=(2^{n-m}+a)2^m$$

において $2^{n-m}+a$ は奇数なので，

$$f_2(S_n+k)=2^{-m}\ (n \text{ によらず一定})$$

となる．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty}f_2(S_n+k)=\lim_{n\to\infty}2^{-m}=2^{-m}\fallingdotseq 0$$

である．

以上から，$k=1$ である．

＊　＊

（1），（2）は問題に入る前の議論に近い．$p=2$ なら

$$d(a,\ b)=f_2(|a-b|)\ (a\fallingdotseq b)$$

となっており，特に，（2）は三角不等式に対応している．

では，（3）で得られた $\lim\limits_{n\to\infty}f_2(S_n+1)=0$ は何を意味しているのだろうか？「距離」の言葉では

$$\lim_{n\to\infty}d(S_n,\ -1)=0$$

となっている．「n が限りなく大きくなるとき，S_n と -1 の距離が限りなく 0 に近づく」である．

実は，極限というものは，「距離の測り方」に依存する概念である．普段考えている極限は，2 つの実数 a，b の距離 $d(a,\ b)=|a-b|$ をもとにしている．この距離で測って「限りなく近づく」と言っているのである．

整数の世界で特別な距離の測り方を考えている状況では，先ほどの結果は

$$\lim_{n\to\infty}S_n=-1$$

と言っても良いのである！つまり，

$$1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots=-1$$

である．2 進法で書くと

$$-1=\cdots\cdots\cdots 11111 \quad (\cdots\cdots\cdots \text{は 1 が無数に続く})$$

である．こんな「特別な極限」を定義することもでき，このように概念を抽象化していくことで，数学の世界はどこまでも広がっていくのである．

ちなみに，通常の極限では

$$1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots=\infty$$

である．

ところで，S_n は

$$\begin{array}{rl} S_n= & 1+2+2^2+\cdots\cdots\cdots+2^{n-1} \\ -)\ 2S_n= & \quad\ \ 2+2^2+\cdots\cdots\cdots+2^{n-1}+2^n \\ \hline -S_n= & 1-2^n \end{array}$$

から導くことができる．これと同様に考えて…

> $S=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots$
>
> とおくと，
>
> $2S=\quad 2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots$
>
> なので，差をとって $S=-1$ となり，
>
> $1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots=-1$
>
> である．

などとやってしまったことはないだろうか？

通常の数学では間違いで，「収束するか分からないんだから，極限を S とおくことは許されないんだ」と注意されるはずである．さらに，「例えば，

$$0.33333\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

を考えるときは，収束するから

$$x=0.33333\cdots\cdots\cdots$$

とおけるけど…」とも言われるだろう．

$$0.33333\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{3}$$

では，通常の距離で考えているので，右にいくほど「小さい」から収束する．一方，ルール違反とされる

$$-1=\cdots\cdots\cdots 11111$$

も，左にいくほど「小さい」ような特別な距離で考えたら，「収束する」と見なせたのである．

上記のおかしな計算も，「特別な距離を考えているから収束するんだ！」と主張することができるのである．このように，既存の常識にとらわれず，無茶な議論を正当化していくことも，数学を発展させる原動力となるのである．

（よしだ　のぶお，予備校講師）