

強者の戦略

数学科の川崎です。今年度もこのページを担当させていただきます。1年間よろしくお願いいたします。
新年度1発目は、最新の入試問題から、すでに目にした人もいるかもしれませんが、抽象関数の問題を出題してみます。難易度はやや高めですが、挑戦してみてください。

第1問 (数III)

すべての実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ で、必ずしも連続とは限らないものを考える。いま、 $f(x)$ がさらに次の性質を持つとする。

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad f(1) = 1$$

このとき、以下を示せ。

- (1) すべての有理数 x に対して $f(x) = x$ である。
- (2) 実数 x, y について、 $x \leq y$ ならば $f(x) \leq f(y)$ である。
- (3) すべての実数 x に対して、 $f(x) = x$ である。