

強者の戦略

数学科の西村です。今年度から強者の戦略のホームページで数学の問題の出題&解説を担当することになりました。皆さんの大学受験の役に立つ問題を出題していきたいと考えております。宜しくお願ひ致します。数列は大学入試において文理ともに頻出分野です。今回はこの分野から出題したいと思います。では早速問題です。

問

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = a_2 = 1$ かつ漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする。

自然数 n に対して、実数 θ_n を $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ かつ $\tan \theta_n = \frac{1}{a_n}$ となるように定める。

- (1) $a_n(a_{n+2} + a_{n+1}) = a_{n+1}a_{n+2} - (-1)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。
- (2) $\theta_{2k+1} + \theta_{2k+2} = \theta_{2k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。