

強者の戦略

数学科の川崎です。夏真っ盛りですがいかがお過ごしでしょうか。この夏、高3生の教え子達には「回転体マスターになれ!」と言って、練習させています。その題材選びに、今年の入試問題を眺めていたとき目についた問題を今回は出題したいと思います。単に体積を出すだけでは終わらずに、それを利用して何かを示せる人になりましょう!

第1問 (数III)

$a > 0$ とする。曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸, y 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに1回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t, 0)$ ($-a \leq t \leq a$) を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, 不等式

$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$$

を示せ。

(3) 不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

を示せ。