強者の戦略

第５１回に引き続き，藤原です。第５２回目は前回紹介した問題の解説です。今回の問題は微分方程式をテーマにした問題でした。

物理において，「未来を予測する」「未来を計画する」とき，初期値（初期座標や初速度）とそれがどのように変化するか（運動方程式）から，予測，計画を立てていきます。

これは物理だけではなくて未来を考えるときの根本的な思考で，例えば「貯金計画」を立てる際も，「現時点の所持金」と「今後それがどのように変化するか（お小遣い，自分の浪費ぐせなど)」を予想して，計画を立てていくと思います。

数学の世界で，その考え方に近いのが数列の漸化式と関数の微分方程式だと思います。初めの値と，それがどのように変化するか（傾きの式）が与えられて，それらをヒントに条件を満たす関数を考える，といった思考です。

今回は模範解答の他に，「この様な問題の考え方はどうか」といった事を＜補足＞の部分で書いてみました。参考にしてみて下さい。

解説を書いた後に「１割物理＋９割数学の問題だな」と感じましたが，物理学においても重要な計算ですので，開き直って物理のページに掲載したいと思います。

では解説を始めたいと思います。

【解答解説】

（1）

与式 ③ を ② に代入して，

$$m_c\alpha^2Be^{\alpha t} = -\gamma_c\alpha^2Be^{\alpha t}$$

$$\therefore\ \ \alpha = -\frac{\gamma_c}{m_c} = -k_c$$

よって $x_c(t) = A + Be^{-k_c t}$， $\dfrac{dx_c}{dt}(t) = -k_cBe^{-k_c t}$

ここで，初期条件 (t=0) より

$$x_c(0) = A + B = 0,\ \ \frac{dx_c}{dt}(0) = -k_cB = V_0$$

$$\therefore\ \ B = -\frac{V_0}{k_c},\ A = -B = \frac{V_0}{k_c}$$

以上より，

$$x_c(t) = \frac{V_0}{k_c}(1 - e^{-k_c t}),\ \ \frac{dx_c}{dt}(t) = V_0e^{-k_c t}$$

＜数学的補足＞

上記の解答は，$x(t)$ の一般解が与式の様な t の指数関数「$A + Be^{-k_c t}$」である事を前提に解かれている。

もちろん，この微分方程式は高校範囲から外れている内容であるため，誘導文に従って解く事が要求されるが，「$A + Be^{-k_c t}$」が与えられていない状態で解を求めるならば，以下の様な導出法がある。

② $\Leftrightarrow \dfrac{d^2x_c}{dt^2} + k_c\dfrac{dx_c}{dt} = 0$

これの両辺に $e^{k_c t}$ をかけて

$$\frac{d^2x_c}{dt^2}e^{k_c t} + k_c\frac{dx_c}{dt}e^{k_c t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_c}{dt}e^{k_c t}\right) = 0$$

微分した値が 0 となるのは定数であるので

$$\frac{dx_c}{dt}e^{k_c t} = P \qquad (P：積分定数)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx_c}{dt} = Pe^{-k_c t}$$

更に t で積分して，

$$x_c(t) = Q - \frac{1}{k_c}Pe^{-k_c t} \qquad (Q：積分定数)$$

となり，これに初期条件 (t=0 での値) を代入すれば，P，Q が求まり，

解 $x_c(t) = \dfrac{V_0}{k_c}(1 - e^{-k_c t})$， $\dfrac{dx_c}{dt}(t) = V_0e^{-k_c t}$ を得る。

＜物理的補足＞

東大後期の総合科目Ⅱは，数学の力だけでほぼ解ける問題もあれば，理科の理解度を要求する問題もあり，その種類は多様である。今回の問題に関して言えば，「自動車の速度」を表す式を問うているが，

それが $\dfrac{dx_{\mathrm{c}}}{dt}(t)$ である事を理解していることが要求されている。さらに言えば，与えられた運動方程式の $\dfrac{d^2x_{\mathrm{c}}}{dt^2}$ は加速度を表す。つまり今回の問題は力学の種々の値について「定義」を理解していないと，設問の意味が読み取れないと思える。

これは一般的な前期試験物理問題にも通じる事で，物理問題を解く上で重要なのは，数学的な「計算力」に加えて，物理量・物理法則の十分な理解からもたらされる「読解力」である。

（2）

与式⑤と $\alpha=-k_{\mathrm{c}}$ を④に代入して，

$$m_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{c}}{}^2De^{-k_{\mathrm{c}}t}+\beta^2Ee^{\beta t})$$
$$=-\gamma_{\mathrm{d}}(-k_{\mathrm{c}}De^{-k_{\mathrm{c}}t}+\beta Ee^{\beta t}-V_0e^{-k_{\mathrm{c}}t})$$

$\alpha=-k_{\mathrm{c}}\neq\beta$ より，$t\geqq 0$ のすべての t で上式が成立するためには，$e^{-k_{\mathrm{c}}t}$ と $e^{\beta t}$ を変数とする恒等式とみなして係数を比較すると

$$m_{\mathrm{d}}k_{\mathrm{c}}{}^2D=\gamma_{\mathrm{d}}k_{\mathrm{c}}D+\gamma_{\mathrm{d}}V_0$$

かつ　$m_{\mathrm{d}}\beta^2E=-\gamma_{\mathrm{d}}\beta E$

$$\therefore\ D=\frac{\gamma_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(m_{\mathrm{d}}k_{\mathrm{c}}-\gamma_{\mathrm{d}})}=\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}$$

また，$\beta\neq 0$，$E\neq 0$ として　$\therefore\ \beta=-\dfrac{\gamma_{\mathrm{d}}}{m_{\mathrm{d}}}=-k_{\mathrm{d}}$

よって，

$$x_{\mathrm{d}}(t)=C+\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}e^{-k_{\mathrm{c}}t}+Ee^{-k_{\mathrm{d}}t}$$

$$\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}(t)=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}-k_{\mathrm{d}}Ee^{-k_{\mathrm{d}}t}$$

ここで，初期条件 $(t=0)$ より

$$x_{\mathrm{d}}(0)=C+\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}+E=0$$

$$\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}(0)=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}-k_{\mathrm{d}}E=V_0$$

$$\therefore\ E=-\frac{k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})},$$

$$C=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}-E=\frac{(k_{\mathrm{c}}+k_{\mathrm{d}})V_0}{k_{\mathrm{c}}k_{\mathrm{d}}}$$

以上より，

$$x_{\mathrm{d}}(t)=\frac{(k_{\mathrm{c}}+k_{\mathrm{d}})V_0}{k_{\mathrm{c}}k_{\mathrm{d}}}+\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}e^{-k_{\mathrm{c}}t}-\frac{k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}e^{-k_{\mathrm{d}}t},$$

$$\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}(t)=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}+\frac{k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{d}}t}$$

また，$\beta=0$ または $E=0$ のときは，

$\dfrac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}(t)=-\dfrac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}$ となり，これは初期条件 $\dfrac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}(0)=V_0$ をみたさないので不適。

<数学的補足>

（2）の解答も（1）と同様に，「$A+Be^{-k_{\mathrm{c}}t}$」が与えられていない状態で解を求めることができる。

$\dfrac{dx_{\mathrm{c}}}{dt}(t)=V_0e^{-k_{\mathrm{c}}t}$ を代入して

$$④\Leftrightarrow\frac{d^2x_{\mathrm{d}}}{dt^2}+k_{\mathrm{d}}\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}=k_{\mathrm{d}}V_0e^{-k_{\mathrm{c}}t}$$

これの両辺に $e^{k_{\mathrm{d}}t}$ をかけて

$$e^{k_{\mathrm{d}}t}\frac{d^2x_{\mathrm{d}}}{dt^2}+k_{\mathrm{d}}e^{k_{\mathrm{d}}t}\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}=k_{\mathrm{d}}V_0e^{(-k_{\mathrm{c}}+k_{\mathrm{d}})t}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}e^{k_{\mathrm{d}}t}\right)=k_{\mathrm{d}}V_0e^{-(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})t}$$

$$\therefore\ \frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}e^{k_{\mathrm{d}}t}=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})t}+S\ \text{（}S\text{：積分定数）}$$

$$\Leftrightarrow\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}+Se^{-k_{\mathrm{d}}t}$$

更に t で積分して，

$$x_{\mathrm{d}}(t)=T+\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}e^{-k_{\mathrm{c}}t}-\frac{1}{k_{\mathrm{d}}}Se^{-k_{\mathrm{d}}t}\ \text{（}T\text{：積分定数）}$$

となり，これに初期条件（$t=0$ での値）を代入すれば，S，T が求まり，

$$x_{\mathrm{d}}(t)=\frac{(k_{\mathrm{c}}+k_{\mathrm{d}})V_0}{k_{\mathrm{c}}k_{\mathrm{d}}}+\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}e^{-k_{\mathrm{c}}t}-\frac{k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{d}}(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})}e^{-k_{\mathrm{d}}t},$$

$$\frac{dx_{\mathrm{d}}}{dt}(t)=-\frac{k_{\mathrm{d}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}+\frac{k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}e^{-k_{\mathrm{d}}t}$$

を得る。

<物理的補足>

本文中に自動車の座席との運転手の，「地面から見た移動距離」を $x_c(t)$，$x_d(t)$ としているため，$\dfrac{dx_c}{dt}(t)$，$\dfrac{dx_d}{dt}(t)$ は「地面から見た速度」である。一方，与式④右辺の $\left(\dfrac{dx_d}{dt}-\dfrac{dx_c}{dt}\right)$ は，「自動車から見た運転手の相対速度」である。本文中にも明記してあるが，シートベルトから受ける力は相対速度に比例した大きさの抵抗力が発生する。

文中に与えられている条件が，式としても与えられている事を理解しておいてほしい。

（3）

$f(t)=L-(x_d(t)-x_c(t))$ とおく。

$$
\begin{aligned}
f'(t)&=-\frac{dx_d}{dt}(t)+\frac{dx_c}{dt}(t)\\
&=\frac{k_dV_0}{k_c-k_d}e^{-k_ct}-\frac{k_cV_0}{k_c-k_d}e^{-k_dt}+V_0e^{-k_ct}\\
&=\frac{k_cV_0}{k_c-k_d}(e^{-k_ct}-e^{-k_dt})
\end{aligned}
$$

$\alpha\fallingdotseq\beta$ より，$k_c\fallingdotseq k_d$ である為，k_c, k_d の大小によらず，$f'(t)\leqq 0$ となり，$f(t)$ は単調減少となって，$t\to\infty$ で $f(t)$ は最小。よって $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)\geqq 0$ であれば題意は満たされる。

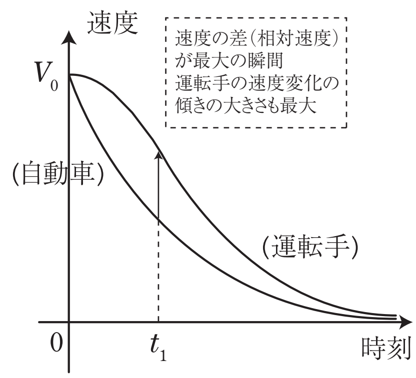
$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\{L-(x_d(t)-x_c(t))\}\\
&=L-\frac{(k_c+k_d)V_0}{k_ck_d}+\frac{V_0}{k_c}\\
&=L-\frac{V_0}{k_d}\geqq 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \gamma_d=k_dm_d\geqq\frac{m_dV_0}{L}$$

＜補足＞

総合科目Ⅱは原則的に「数学の問題」と考えるべきなので，直感的に運転手とハンドルとの距離 $f(t)=L-(x_d(t)-x_c(t))$ は，$t\to\infty$ で最小のはず，と決めつけてしまわず，上記の解答の様に増減を確かめながら考える方が適切である。

物理的，直感的に考えてみる。式②，④で与えられている様に，「自動車が受ける抵抗力の大きさ」は自動車の速度 $\dfrac{dx_c}{dt}$ に比例し，「運転手が受ける抵抗力の大きさ」は自動車に対する運転手の相対速度速度 $\left(\dfrac{dx_d}{dt}-\dfrac{dx_c}{dt}\right)$ に比例ので，自動車と運転手の速度変化は大まかに，以下のグラフの様に変化すると思われる。



$t=0$ では，自動車，運転手共に速度 V_0，相対速度 0 であるため，運転手は初め抵抗力を受けず，速度変化は 0（傾き 0）。一方で自動車は初めから抵抗力を受けて速度減少する。

図中にあるように，運転手の速度減少（負の傾き）の大きさは，２つの速度の差に比例する。このグラフより，常に $\dfrac{dx_c}{dt}\geqq\dfrac{dx_d}{dt}$（運転手の速度≧自動車の速度）であり，$t\to\infty$ のときに最も運転手はハンドルに近づいているはずと予想される。

理科的な思考では先に直感的な予測から始まり，後でそれを数理計算や実験で検証する，といった考え方をする事が多い。

（4）

式④の右辺より，運転手が受ける抵抗力 $R(t)$ について

$$R(t)=-\gamma_d\left(\frac{dx_d}{dt}-\frac{dx_c}{dt}\right)=\gamma_d f'(t)$$

ここで $f''(t)=\dfrac{k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}(-k_{\mathrm{c}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}+k_{\mathrm{d}}e^{-k_{\mathrm{d}}t})=0$ となるのは,

$$-k_{\mathrm{c}}e^{-k_{\mathrm{c}}t}+k_{\mathrm{d}}e^{-k_{\mathrm{d}}t}=0 \quad\Leftrightarrow\quad e^{(k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}})t}=\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}\log\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}\ (=t_1)$$

以下の増減表より,

t	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$	∞
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$	0	↘		↗	0

$|R(t)|$ が最大となるのは, $f'(t)$ が最小のとき, すなわち $t_1=\dfrac{1}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}\log\dfrac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}$ のときである。

このとき,

$$|R(t_1)|=-\gamma_{\mathrm{d}}f'(t_1)$$
$$=-\frac{\gamma_{\mathrm{d}}k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}(e^{-k_{\mathrm{c}}t_1}-e^{-k_{\mathrm{d}}t_1})$$
$$=-\frac{\gamma_{\mathrm{d}}k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}\left\{\left(\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}\right)^{-\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}}-\left(\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}\right)^{-\frac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}}\right\}$$
$$=-\frac{\gamma_{\mathrm{d}}k_{\mathrm{c}}V_0}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}\left(\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}\right)^{-\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}}\left(1-\frac{k_{\mathrm{c}}}{k_{\mathrm{d}}}\right)$$
$$=\gamma_{\mathrm{d}}V_0\left(\frac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}\right)^{\frac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}}$$

(5)

$|R(t_1)|=\widetilde{R}(\gamma_{\mathrm{d}})$ とおき,(4)で求めた抵抗力の最小値が, γ_{d} によって, どのように値が変化するかを考える。

$$\widetilde{R}(\gamma_{\mathrm{d}})=\gamma_{\mathrm{d}}V_0\left(\frac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}\right)^{\frac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}-k_{\mathrm{d}}}}$$

(ここで $k_{\mathrm{d}}=\dfrac{\gamma_{\mathrm{d}}}{m_{\mathrm{d}}}$ であり, 質量 m_{d} は γ_{d} によらないので, k_{d} は γ_{d} によって変化する値である事に注意する。)

ここで, $x=\dfrac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}=\dfrac{m_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}\gamma_{\mathrm{d}}$ とおくと, $\dfrac{dx}{d\gamma_{\mathrm{d}}}=\dfrac{m_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}$

よって,

$$\frac{d\widetilde{R}}{d\gamma_{\mathrm{d}}}(\gamma_{\mathrm{d}})=m_{\mathrm{d}}V_0k_{\mathrm{c}}\frac{dx}{d\gamma_{\mathrm{d}}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)$$
$$=m_{\mathrm{d}}V_0k_{\mathrm{c}}\cdot\frac{m_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}\frac{d}{dx}\left(e^{\frac{1}{1-x}\log x}\right)$$
$$=m_{\mathrm{d}}{}^2V_0e^{\frac{1}{1-x}\log x}\left\{\frac{\log x}{(1-x)^2}+\frac{1}{x(1-x)}\right\}$$
$$=m_{\mathrm{d}}{}^2V_0x^{\frac{1}{1-x}}\frac{x\log x+1-x}{x(1-x)^2}$$

$x>0$ において, $x^{\frac{1}{1-x}}>0$, $x(1-x)^2\geqq 0$ である。

$g(x)=x\log x+1-x$ とおくと, $g'(x)=\log x+1-1=\log x$ であり, 増減表は下の様になり,

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	/	$-$	0	$+$
$g(x)$	/	↘	0	↗

$x>0$ で $g(x)\geqq 0$ である。

よって, $x>0$ の範囲において

$$\frac{d\widetilde{R}}{d\gamma_{\mathrm{d}}}(\gamma_{\mathrm{d}})=m_{\mathrm{d}}{}^2V_0x^{\frac{1}{1-x}}\frac{x\log x+1-x}{x(1-x)^2}\geqq 0$$

であり, $x=\dfrac{k_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}=\dfrac{m_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{c}}}\gamma_{\mathrm{d}}$ であるので, $\widetilde{R}(\gamma_{\mathrm{d}})$ は, x および γ_{d} に対して単調増加するので, 抵抗力が最も小さくなる瞬間の値 $\widetilde{R}(\gamma_{\mathrm{d}})(=|R(t_1)|)$ をなるべく小さくするためには, x および γ_{d} がなるべく小さくすれば良い。

ただし, ハンドルにぶつからない条件を満たさなければならないので,(3)より $\gamma_{\mathrm{d}}\geqq\dfrac{m_{\mathrm{d}}V_0}{L}$

以上より, $\gamma_{\mathrm{d}}=\dfrac{m_{\mathrm{d}}V_0}{L}$ にすればよい。

＜補足＞

最後の問題(5)は, k_{d} も γ_{d} に比例して変化する変数である事に気づいていないと $\dfrac{d\widetilde{R}}{d\gamma_{\mathrm{d}}}=$ 定数, と勘違いする。数学力だけでなく, 物理量の変数, 定数を見抜く力も要求される難問。

なお，模範解答では別の変数 x に置き換えて計算しているが，γ_{d} の関数 $k_{\mathrm{d}}(\gamma_{\mathrm{d}})$ を残したまま γ_{d} で微分しても，同じ解を得られる（ただ文字が多くなり，計算がやや煩わしくなる）。

＜最後に＞

微分方程式は高校範囲からは一応外れていますが，発展項目として数Ⅲの教科書や問題集に掲載されています。大学の数学や物理では頻繁に用いる計算ですので，今回の問題のように，計算方針を指示された状態で出題される事は考えられます。暗記すべき公式はありませんが，文中にいきなり与えられても慣れていなければ，対応するのはなかなか厳しいと思います。

出来れば高校生の時点で簡単な微分方程式の例に触れておき，微分方程式の考え方に慣れておいた方が良いかと思います。