強者の戦略

研伸館の米田 誠です。強者の戦略 HP の物理のページ，第 53 回目は『和歌山県立医科大学　前期日程　物理（改題)』からの出題です。この問題は交流回路におけるリアクタンス，インピーダンスや電流と電圧の位相のずれに関する計算がテーマとなっています。一般的にはインピーダンスの計算は，三角関数の合成を行ったり，もしくは回路上の各部品（コンデンサーやコイル）での位相のずれを用いた作図法で計算します。また，高校の検定教科書では加法定理と近似によって計算することが多いリアクタンスについても，微分・積分の考え方を用いてスムーズに導出する方法もあります。以上のように，この問題にチャレンジする際には，上記の二点，インピーダンスの計算における作図の意味とリアクタンスの導出における微分・積分を用いた計算の簡略化に考察していただければと思います。では，頑張ってください。

【問題】交流回路における力率『出典：２０１０年度　和歌山県立医科大学　前期日程　物理（改題)』

（考察時間目安：２０分）

角周波数 ω [rad/s] の交流電源（時刻 t [s] での電圧 V [V] は $V = V_0 \sin\omega t$ と書けるとする），コイル（インダクタンス L [H]），コンデンサー（電気容量 C [F]），抵抗（抵抗値 R [Ω]）を接続した回路（図 1）について考える。微小な時間を Δt [s] としたとき，$\omega\Delta t$ も微小な量となる。それぞれ接続する導線の抵抗とコイルの抵抗は無視できるとする。図 1 のように，コンデンサーの両端を点 A，点 B とし，抵抗とコイルをつないだ部分の両側を点 C，点 D とする。点 A からコンデンサーに流れる電流を I_1 [A]，点 C から抵抗に流れる電流を I_2 [A] とし，I [A] は $I = I_1 + I_2$ とする。図 2 の矢印の向きを各電流の正の向きとする。また，時刻 t のときにコンデンサーにたくわえられる電気量を Q [C] とする。以下の $\boxed{\ 1\ }$ ～ $\boxed{\ 10\ }$ に適切な数式あるいは数値を記し，(A) の（問）では指示にしたがって解答を記せ。必要なら，三角関数の公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

を用いてよい。また，x が微小な量のとき，$\sin x \fallingdotseq x$，$\cos x \fallingdotseq 1$ という近似を用いよ。

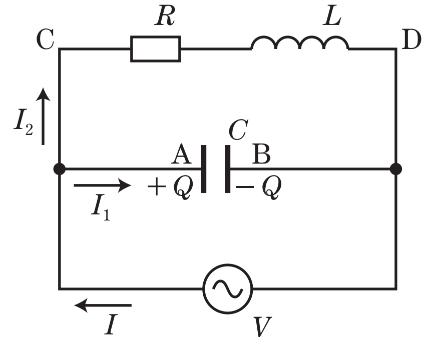

図　1

(A)　抵抗値が 0 [Ω] の場合を考える。点 A と点 B の間に電源の電圧が加わり，コンデンサーに電流 I_1 が流れる。微小時間 Δt の間の電気量の変化を ΔQ とし，微小時間 Δt の間の電流 I_1 の変化は小さく一定値とみなせるとすると，I_1 を用いて $\Delta Q = \boxed{\ 1\ }$ となる。したがって，I_1 は，Δt を用いない形で，電気容量 C を用いて時刻 t の関数として $I_1 = \boxed{\ 2\ }$ と表せる。また，点 C と点 D の間に電源の電圧が加わるとき，コイルに流れる電流 I_2 が，微小時間 Δt だけ時間が経ったとき ΔI_2 だけ増加したとする。このとき，ΔI_2，Δt などを用いて V を表すと，$V = \boxed{\ 3\ }$ となる。I_2 を $I_2 = I_{20}\sin(\omega t+\alpha)$（ただし $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$）と表して計算すると，$I_2$ は Δt を用いない形で，インダクタンス L を用いて時刻 t の関数として $I_2 = \boxed{\ 4\ }$ と表せる。以上まとめると，電流 I は $I = \boxed{\ 5\ }$ となる。この電流の大きさ $|I|$ が t=0 で最小となる角周波数は $\boxed{\ 6\ }$ であり，その最小値は $\boxed{\ 7\ }$ となる。

（問）　角周波数と $t = 0$ における電流値の関係を次の (a)(b) についてグラフに描け。ここで，角周波数を横軸，$t = 0$ における電流値をたて軸とせよ。また，電流の大きさ $|I|$ が $t = 0$ で最小となるときの角周波数とそのときの電流値をそれぞれのグラフに記入せよ。

(a) コンデンサーに流れる電流 I_1，　　(b) コイルに流れる電流 I_2

(B)　抵抗値が 0 [Ω] ではない場合について考える。このとき，I_2 が，微小時間 Δt だけ時間が経った時に ΔI_2 だけ増加したとする。このとき，点 C と点 D の間に電源の電圧が加わるので，I_2 や ΔI_2 などを用いて V を表すと，$V = \boxed{\ 8\ }$ となる。I_2 を $I_2 = I_{20}\sin(\omega t+\phi)$（ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \phi \leqq \dfrac{\pi}{2}$）と表すと，$\tan\phi = \boxed{\ 9\ }$ となり，I_{20} については ϕ を用いて $I_{20} = \boxed{\ 10\ }$ と求められる。このとき，$\cos\phi$ を V に対する CD 間の力率といい, CD 間の皮相電力（apparent power：電圧の実効値と電流の実効値の積）に対する CD 間の有効電力（effective power：実際に消費される電力）の割合を示す。